

Programme de colle 22

Classe de PC

Semaine du lundi 1er au vendredi 5 avril

Liste des questions de cours

- Étude des extrema de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- Ensemble de définition et caractère \mathcal{C}^1 d'une intégrale à paramètre du type $x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$. Équation différentielle et résolution de l'équation différentielle.
- Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} dt$.

En plus du programme ci-dessous, les exercices peuvent s'inspirer des questions de cours suivantes – et éventuellement remplacer la question de cours :

- Expression de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Limite de la suite $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, avec $x \in \mathbb{R}$
- Nature des intégrales : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} dt$ où $\beta \in \mathbb{R}$; $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\int_0^1 \ln t dt$
- Énoncer les 3 CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ soit diagonalisable.
- Soit X une variable aléatoire discrète, rappeler $X(\Omega)$ et la loi de X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p)$, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, avec $N \in \mathbb{N}$, $p \in]0, 1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. *C'est l'analogie des DL usuels, en probabilités : tout aussi incontournables.*
- Rayon et somme des séries entières usuelles : famille exponentielle (exp, cos, sin, sh, ch), géométrique ($\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\operatorname{Arctan}(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1 Calcul différentiel

1.1 Fonctions \mathcal{C}^1

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, applications \mathcal{C}^1 , gradient, différentielle.

Formule de Taylor à l'ordre 1. Compositions : règle de la chaîne et changements de variable.

Fonctions constantes sur un ouvert convexe.

1.2 Fonctions \mathcal{C}^2

Dérivées partielles d'ordre 2, classe \mathcal{C}^2 , théorème de Schwarz.

Matrice hessienne $H_f(a)$, formule de Taylor à l'ordre 2.

Recherche d'extrema : points critiques, hessienne, cas de la dimension 2.

Savourez bien cette dernière colle !