Programme de colle 22

Classe de PC

Semaine du lundi 31 mars au vendredi 4 avril

Liste des questions de cours

- Étude des extrema de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- Ensemble de définition et caractère $\mathscr{C}^1$ d'une intégrale à paramètre du type $x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Équation différentielle et résolution de l'équation différentielle.
- Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$.

En plus du programme ci-dessous, les exercices peuvent s'inspirer des questions de cours suivantes – et éventuellement remplacer la question de cours :

- Expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Limite de la suite $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, avec $x \in \mathbb{R}$
- Nature des intégrales : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ où $\beta \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$
- Énoncer les 3 CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable.
- Soit X une variable aléatoire discrète, rappeler $X(\Omega)$ et la loi de X lorsque $X \sim \mathscr{B}(N,p)$, $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, avec $N \in \mathbb{N}$, $p \in]0,1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. *C'est l'analogue des DL usuels, en probabilités : tout aussi incontournables.*
- Rayon et somme des séries entières usuelles : famille exponentielle (exp, cos, sin, sh , ch), géométrique ($\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\operatorname{Arctan}(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1 Calcul différentiel

1.1 Fonctions $\mathscr{C}^1$

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, applications $\mathscr{C}^1$, gradient, différentielle.
Formule de Taylor à l'ordre 1. Compositions : règle de la chaîne et changements de variable.
Fonctions constantes sur un ouvert convexe.

1.2 Fonctions $\mathscr{C}^2$

Dérivées partielles d'ordre 2, classe $\mathscr{C}^2$, théorème de Schwarz.
Matrice hessienne $H_f(a)$, formule de Taylor à l'ordre 2.
Recherche d'extrema : points critiques, hessienne, cas de la dimension 2.

Savourez bien cette dernière colle !