

Programme de colle 15

Classe de PC

Semaine du lundi 22 au vendredi 26 janvier

Liste des questions de cours

- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux (avec preuve).
- Un projecteur p de E euclidien est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint (avec preuve).
- Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$.
- Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\inf(\text{Sp}(f))\|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \sup(\text{Sp}(f))\|x\|^2$
- Soit X une variable aléatoire discrète, rappeler $X(\Omega)$ et la loi de X lorsque $X \sim \mathcal{B}(N, p)$, $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, avec $N \in \mathbb{N}$, $p \in]0, 1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
- Formule des probabilités totales.
- (Loi conditionnelle) Une grenouille pond X oeufs selon une loi de poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$, chaque oeuf éclot de façon indépendante selon une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Loi du nombre Y d'oeufs éclos.
- (Loi de couple) On effectue une suite de lancers indépendants avec une pièce non équilibrée (probabilité $p \in]0, 1[$ d'avoir pile). Donner la loi de la longueur X de la première chaîne, et Y de la deuxième chaîne.

1 Algèbre bilinéaire

Révisions de la semaine précédente.

1.1 Endomorphismes autoadjoints

1.2 Définition

Définition et matrice (dans une base orthonormée) d'un endomorphisme autoadjoint.

1.2.1 Réduction

Théorème spectral : un endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormée. Version matricielle.

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif, caractérisations spectrales. Versions matricielles.

2 Probabilités

2.1 Ensembles, cardinaux, tribus

Lien entre propositions et ensembles associés (et, ou, non, \forall , \exists). Définition d'un ensemble dénombrable, \mathbb{Z} est dénombrable, un produit cartésien d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Familles sommables.

Tribus (pas d'exercices portant sur les tribus).

2.2 Probabilités

2.2.1 Généralités

Probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) . Vocabulaire : **système (quasi) complet d'événements** ; événement presque sûr, événement négligeable. Croissance, $P(A \cup B)$, continuité croissante et décroissante, sous-additivité.

Lois géométrique et de Poisson sur \mathbb{N} .

2.2.2 Probabilités conditionnelles, indépendance

Définition. Formule des probabilités composées, **formule des probabilités totales**, formule de Bayes. Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle.

2.3 Variables aléatoires discrètes

2.3.1 Généralités

Définition, loi d'une variable aléatoire discrète, égalité en loi, image par un application.

2.3.2 Couples de variables aléatoires discrètes, indépendance

Définition, loi conjointe, loi marginale. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes, indépendance mutuelle d'une famille de variables aléatoires discrètes. Lemme des coalitions.