Programme de colle 13

Classe de PC

Semaine du lundi 8 au vendredi 12 janvier

Liste des questions de cours
• Sur $E=\mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire. • Sur $E=\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$, où $a_0,\dots,a_n$ sont des réels 2 à 2 distincts, est un produit scalaire. Donner base orthonormée pour ce produit scalaire (avec preuve). • Sur $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}\left(A^T B\right)$ est un produit scalaire. Donner base orthonormée pour ce produit scalaire (avec preuve). • Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $\left[\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^T A Y = 0\right] \Longrightarrow A = 0$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. $\left[\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle = 0\right] \Longrightarrow u = 0$. • Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \lVert p(x)\rVert \leqslant \lVert x\rVert$. • Si $u \in \mathscr{L}(E)$, u est une symétrie orthogonale si et seulement si u est une symétrie et une isométrie (avec preuve).

1 Algèbre bilinéaire

1.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.
Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.
Théorème de Pythagore.

1.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.
Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.
Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.

1.3 Isométries

Définition et valeurs propres réelles possibles d'une isométrie. Groupe $\mathscr{O}(E)$. L'orthogonal d'un sous-espace stable est stable.
Définition et déterminant d'une matrice orthogonale. Interprétation comme matrice d'une isométrie dans une base orthonormée, ou matrice de changement de base orthonormée. Groupes $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$. Orientation, bases directes.
Description dans le cas de la dimension 2.