

# Programme de colle 12

Classe de PC

Semaine du lundi 16 au vendredi 20 décembre

## Liste des questions de cours

- Énoncer la CNS pour qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  soit trigonalisable.
- Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $\chi_A = \chi_B$ .  
 $\text{Tr}(A)$  est somme des valeurs propres (même complexes) de  $A$  avec multiplicité.
- Sur  $E = \mathbb{R}[X]$ ,  $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$  est un produit scalaire.
- Sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$ , où  $a_0, \dots, a_n$  sont des réels 2 à 2 distincts, est un produit scalaire. Donner base orthonormée pour ce produit scalaire (avec preuve).
- Sur  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\varphi : (A, B) \mapsto \text{Tr}(A^T B)$  est un produit scalaire. Donner base orthonormée pour ce produit scalaire (avec preuve).

## 1 Algèbre bilinéaire

### 1.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.

Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.

Théorème de Pythagore.

### 1.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.

Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.

Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.