Programme de colle 11

Classe de PC

Semaine du lundi 11 au vendredi 15 décembre

Liste des questions de cours
• Déterminant de Vandermonde (valeur et preuve). • Énoncer les CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable (définition et 2 théorèmes). • Énoncer la CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit trigonalisable. • Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$. • $\mathrm{Tr}\,(A)$ est somme des valeurs propres (même complexes) de A avec multiplicité.

1 Réduction

1.1 Cas général

Valeurs propres et spectre. Vecteurs propres et Sous-espaces propres.
Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P.
Cas des projections, des symétries et des endomorphismes nilpotents.

1.2 Dimension finie

Polynôme caractéristique, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre. Théorème de Cayley-Hamilton.
CNS de diagonalisation (4 propositions, y compris la définition). u diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
CS de diagonalisation : cas de $u \in \mathscr{L}(E)$ ayant $n = \dim E$ valeurs propres distinctes.
CNS de trigonalisation. Cas complexe.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la trace est la somme des valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes), et le déterminant le produit des valeurs propres (idem).

1.3 Applications de la réduction

Calcul des puissances d'une matrice, d'une racine carré, d'un commutant.