Révisions : Probabilités

Quelques questions de cours à savoir faire et refaire.

Exercice 1 (BEOS, 2017 – Exo 2)
Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres p_1 et p_2. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 2
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Donner la loi de $X + Y$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 (BEOS, 2017 – Exo 2)
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la loi de Y sachant $(X = n)$ est une loi binomiale de paramètres n, p avec $p \in]0, 1[$.

1) Déterminer la loi conjointe de X et Y.

2) Déterminer la loi de Y.

Exercice 4
On effectue une suite de lancers indépendants avec une pièce non équilibrée (probabilité $p \in]0, 1[$ d'avoir pile). Donner la loi de la longueur X de la première chaîne, et Y de la deuxième chaîne.

Exercice 5 (OT, 2017 – Exo 2)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes de loi de Bernoulli de paramètre p. On note pour $n \geq 1$, $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$.

2) Calculer $\mathbb{V}(S_n)$.

3) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2p\right| \geq \epsilon\right) = 0$.

Exercice 6
Montrer par les fonctions génératrices qu'il est impossible de « truquer » deux dés cubiques et indépendants pour que la somme d'un lancer suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$

Exercice 7 (RMS, 2017 – Exo 2)
Soient $a > 0$ et X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

1) Pour tout $d \geq 2$, on note A_d l'événement « X est un multiple de d ». Calculer $P(A_d)$.

2) Les événements A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?

Exercice 8 (RMS, 2016 – Exo 2)
On considère deux urnes. La première contient 4 boules noires et 2 blanches, la deuxième 2 noires et 4 blanches. On choisit une urne au hasard, on tire successivement 3 boules sans remise. Donner la probabilité de tirer une troisième boule noire sachant que l'on a déjà tiré 2 boules noires avant.

Exercice 9 (Lycée Fauriel, 2016) **1)** On considère p variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_p)$ admettant chacune une variance. On note $\Gamma = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ la matrice des covariances. On cherche $c = (c_1, \ldots, c_p) \in \mathbb{R}^p$ non nul tel que $\dfrac{1}{\|c\|^2}\mathbb{V}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} c_i X_i\right)$ soit maximal (pour avoir un échantillon le plus varié possible), où $\|.\|$ est la norme euclidien usuelle de $\mathbb{R}^p$.

a) Montrer que pour tout $c \in (\mathbb{R}_+)^p$, $\mathbb{V}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} c_i X_i\right) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} c_i c_j \text{Cov}(X_i, X_j)$.

b) Montrer que Γ est diagonalisable.

c) Soient $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p$ les valeurs propres de Γ énoncées dans l'ordre décroissant, un nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité. On note C le vecteur colonne $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$. Montrer que ${}^tC\Gamma C = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{p} c_i X_i\right)$, et en déduire que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$.

d) Montrer que $\dfrac{1}{\|c\|^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{p} c_i X_i\right) \leqslant \lambda_1$ (on pourra se placer dans une base de vecteurs propres de Γ).

e) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si C est un vecteur propre de Γ associé à λ_1.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}$ où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que A est diagonalisable.

b) Montrer que $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et trouver la valeur propre associée.

c) Montrer que $1-\rho$ est une valeur propre de A et déterminer la dimension de l'espace propre associé.

3) Application : on prend $p = 3$, on se donne $\rho \in [0, 1]$, (X_1, X_2, X_3) trois variables alétaoires de variances respectives V_1, V_2, V_3, telles que pour $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, si $i \neq j$, alors le coefficient de corrélation linéaire de X_i et X_j vaut $\rho(X_i, X_j) = \rho$. On pose $Y_i = \dfrac{X_i}{\sqrt{V_i}}$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, et $\Lambda = \big(\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$.

Trouver les valeurs propres de Λ et c tel que $\dfrac{1}{\|c\|^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{3} c_i Y_i\right)$ soit maximal.