

Exercice 1 (CCP PC 2019 (retour élève) - exo 2)

Soit $P = (1 + X)^7 - X^7 - 1$.

- 1) Montrer que j est racine de P .
- 2) Déterminer la multiplicité de j comme racine de P .
- 3) Factoriser P en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{1)} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} & \mathbf{2)} \quad x + y + z - t = 0 & \mathbf{3)} \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 3

Montrer que les parties F suivantes sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel que l'on précisera :

$$\mathbf{1)} \quad F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t) dt = 0 \right\}. \quad \mathbf{2)} \quad F = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n \right\}.$$

Exercice 4

Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes. On commencera par montrer que f est linéaire pour les applications des questions 3 et 4.

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{1)} \quad f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, y - 2x + z) \end{cases} & \mathbf{2)} \quad f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (y + z, z + x, x + y) \end{cases} \\
 \mathbf{3)} \quad f: \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X + 1) \end{cases} & \mathbf{4)} \quad f: \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{cases}
 \end{array}$$

Noyaux et images des applications des questions 2 et 4. Réduction des deux endomorphismes.

Exercice 5

Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel dont on précisera la dimension.
- 2) Montrer que E est stable par produit.
- 3) À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $A = M(a, b, c)$ est-elle inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On suppose cette condition vérifiée. En considérant l'application $f: E \rightarrow E$ définie par $f(X) = AX$, montrer que $A^{-1} \in E$.
- 4) Quelles sont les matrices de E diagonalisables?

Exercice 6

Soit φ défini sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(M) = \text{Tr}(M)I_n + M$.

- 1) Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
- 2) Déterminer le noyau et le rang de φ . L'endomorphisme est-il bijectif?
- 3) Vérifier que $\varphi^2 - (n + 2)\varphi + (n + 1)\text{id}_E = 0$. En déduire une expression de φ^{-1} .
- 4) L'application φ est-elle diagonalisable?

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer les valeurs propres de A .
- 2) Déterminer un polynôme annulateur P de A de degré 3. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- 3) Désormais, $n \in \mathbb{N}$ est fixé. Effectuer la division euclidienne de X^n par P . On explicitera les coefficients du reste en fonction de n , sans chercher à expliciter le quotient.
- 4) Calculer A^n en fonction de n .

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $a \in E$ non nul, et $H = \{x \in E \mid \langle a, x \rangle = 0\}$.

- 1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.
- 2) Soit $x \in E$. Exprimer le projeté orthogonal de x sur H à l'aide de a , x et $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En déduire la distance $d(x, H)$ entre x et H .
- 3) Dans $E = \mathbb{R}^3$ usuel, déterminer la distance de $x = (1, 2, 3)$ au plan H d'équation $x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

Exercice 9

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique réelle, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

Exercice 10

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint de E . Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\inf(\text{Sp}(f))\|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \sup(\text{Sp}(f))\|x\|^2$$

Puis que

$$\sup(\text{Sp}(f)) = \max \left\{ \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \mid x \in E \text{ et } x \neq 0 \right\}$$

Exercice 11

Soit $H = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que $H_p = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.