



## CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

### Épreuve de Physique-Modélisation PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**L'usage de calculatrices est autorisé.**

#### AVERTISSEMENT

**Le candidat devra porter l'ensemble de ses réponses sur le cahier réponses, à l'exclusion de toute autre copie. Les résultats doivent être reportés dans les cadres prévus à cet effet.**

Le sujet comporte des questions d'informatique de deux types : programmation et bases de données.

Les questions de programmation commencent par une mention du type : "écrire une fonction..." et les codes seront obligatoirement écrits en langage Python.

Les réponses aux questions sur les bases de données comportant une mention du type : "écrire la requête..." seront obligatoirement écrites en langage SQL (MySQL ou SQLite).

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

**Tournez la page S.V.P.**

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

## Des ondes pas toujours harmoniques

Que ce soit la lumière, le son, l'flux nerveux, les télécommunications..., beaucoup de phénomènes naturels ou technologiques sont de nature ondulatoire.

De nombreux phénomènes ondulatoires sont étudiés en cours, mais on se limite la plupart du temps à l'étude des Ondes Planes Progressives Harmoniques (OPPH). Celles-ci ont le mérite d'être facilement étudiabiles, mais ne permettent pas de modéliser le transport d'information. Par exemple, une onde radio FM n'est pas harmonique mais contient plusieurs fréquences selon l'information qu'on veut propager. Il en va de même pour les sons, les autres ondes électromagnétiques...

Dans ce problème, nous allons étudier deux types d'ondes : les ondes sonores et les ondes électromagnétiques, et nous allons surtout étudier le comportement de telles ondes quand elles sont non harmoniques.

Les résultats importants sont encadrés en double trait dans l'énoncé et sont destinés à être réutilisés dans la suite même s'ils n'ont pas été démontrés.

### PREMIÈRE PARTIE

#### Les ondes sonores

Après la vue, l'ouïe est le deuxième sens le plus développé chez l'homme, même si de nombreux animaux ont une ouïe beaucoup plus fine que la nôtre. C'est le sens qui nous permet de profiter de la beauté de la musique, de transmettre de nombreuses informations, mais aussi celui qui est agressé par de nombreuses nuisances sonores, au point que cette pollution est reconnue au même titre que celles de l'eau, de l'air, ou la pollution lumineuse.

Nous commencerons cette partie par une mise en équation, puis nous conduirons l'étude d'une onde harmonique, ensuite nous étudierons différents aspects de l'acoustique musicale : spectre d'un instrument, problèmes pouvant survenir pendant des concerts, gestion d'une école de musique, isolation acoustique.

Les sous-parties sont globalement indépendantes, mais il est conseillé de lire les sous-parties précédentes avant d'en entamer une nouvelle.

On négligera la pesanteur dans toute cette partie.

Le référentiel terrestre sera considéré comme galiléen.

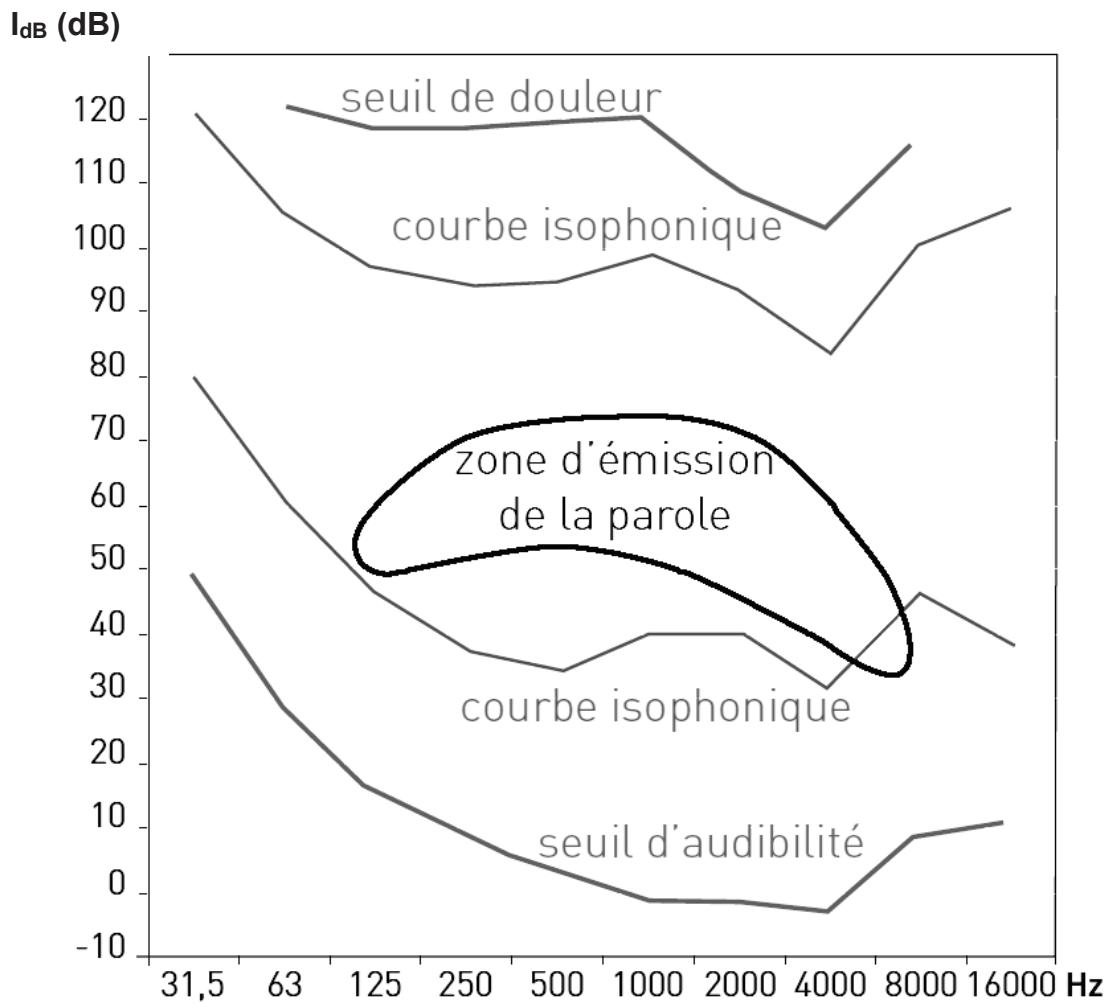
L'air sera considéré comme un gaz parfait diatomique non visqueux de rapport  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,40$  et de masse molaire  $M = 29,0 \text{ g.mol}^{-1}$ .

On donne la constante des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.K^{-1}$ .

La célérité des ondes sonores sera notée  $c$ .

La température en Kelvin  $T$  et celle en degrés Celcius  $\theta$  sont reliées numériquement par  $T = \theta + 273$ .

On donne les courbes d'audibilité et de douleur de l'oreille humaine sur la figure 1. Y sont tracées également des courbes isophoniques, qui relient les points de même sensation d'intensité sonore pour l'oreille humaine.



**Figure 1** – Courbes de sensibilité de l'oreille humaine  
(Intensité sonore en dB en fonction de la fréquence en Hz)

### A / Mise en équation

Nous allons travailler dans cette sous-partie avec des ondes unidimensionnelles, c'est-à-dire des champs ne dépendant que de la coordonnée d'espace  $x$  et du temps  $t$ .

Au repos, l'air peut être décrit par les champs de pression  $P_0 = 1,00$  bar, de masse volumique  $\mu_0$  et de vitesse  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ , tous uniformes. L'onde sonore est une perturbation de cet état d'équilibre, où les champs deviennent :

- champ de pression :  $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$  où  $p$  est la surpression ;
- champ de masse volumique :  $\mu(x,t) = \mu_0 + \rho(x,t)$  ;
- champ de vitesse :  $\vec{v}(x,t) = \vec{0} + \vec{v}(x,t) \vec{u}_x$ .

L'approximation acoustique consiste à considérer que les termes de perturbation  $p/P_0$ ,  $\rho/\mu_0$  et  $v/c$  sont des infiniment petits d'ordre 1.

**A1.** Écrire l'équation d'Euler dans l'air. La linéariser en expliquant convenablement les simplifications faites. L'équation linéarisée sera notée (E).

**A2.** Écrire l'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité). La linéariser. L'équation linéarisée sera notée (M).

**A3.** Lors du passage d'une onde sonore, les transformations de l'air sont supposées adiabatiques réversibles. On introduit  $\chi_s$  le coefficient de compressibilité isentropique de l'air. Rappeler l'expression de  $\chi_s$  en fonction de la pression  $P$  et du volume  $V$  d'une particule de fluide, puis en fonction de la pression  $P$  et de la masse volumique du fluide  $\mu$ . Linéariser cette expression dans le cadre de l'approximation acoustique. L'équation linéarisée sera notée (T).

**A4.** En utilisant les équations (E), (M) et (T), retrouver l'équation de propagation de l'onde

sonore à une dimension vérifiée par  $p$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Donner l'expression de  $c$ .

Expliquer comment on peut passer à l'équation d'une onde sonore tridimensionnelle.

**A5.** Déterminer l'expression de  $c$  pour un gaz parfait et sa valeur numérique pour l'air à  $\theta = 20,0^\circ\text{C}$ .

## B / Étude d'une onde sonore harmonique

**B1.** On étudie une onde unidimensionnelle dont le champ de surpression complexe s'écrit  $p(x,t) = p_0 \exp [j(\omega t - kx)]$ .

Justifier clairement que cette onde est plane, progressive, harmonique, et préciser dans quel sens elle se propage. On donnera la définition de chaque terme et on précisera pour chacun pourquoi on peut l'attribuer à cette onde.

**B2.** Établir la relation de dispersion pour cette onde. Qu'en déduire ?

**B3.** On cherche le champ de vitesse complexe sous la forme  $\underline{v}(x,t) = \underline{v}_0 \exp [j(\omega t - kx)]$ , avec  $\underline{v} = \underline{v} \vec{u}_x$ .

Montrer qu'on peut écrire  $\underline{p}(x,t) = Z \underline{v}(x,t)$ . Préciser l'expression de  $Z$  et donner son nom.

**B4.** Déterminer l'expression de  $Z$  pour un gaz parfait.

En déduire sa valeur numérique pour l'air à  $T = 20,0^\circ\text{C}$  et  $P_0 = 1,00 \text{ bar}$ .

**B5.** On définit l'intensité sonore par la valeur moyenne  $I = \langle p v \rangle$ .

Vérifier que  $I$  a bien la dimension d'une puissance surfacique.

**B6.** On définit l'intensité sonore en décibels comme  $I_{dB} = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$ , où  $I_0$  est l'intensité de référence et vaut  $I_0 = 1,00 \cdot 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ .

Justifier la différence avec le gain en décibels en électricité, défini par  $G_{dB} = 20 \log \left( \frac{u_s}{u_e} \right)$  où  $u_s$  et  $u_e$  sont respectivement les tensions de sortie et d'entrée du montage.

**B7.** On veut ici vérifier si l'approximation acoustique est justifiée, même pour un son très intense d'intensité  $I_M$ .

Déterminer les expressions de  $p_0$  et de  $v_0$ , amplitudes de la pression et de la vitesse, en fonction de  $I_M$  notamment.

Donner un ordre de grandeur de l'intensité en décibels d'un son très intense, en déduire l'intensité  $I_M$  correspondante puis  $p_0$  et  $v_0$  et conclure.

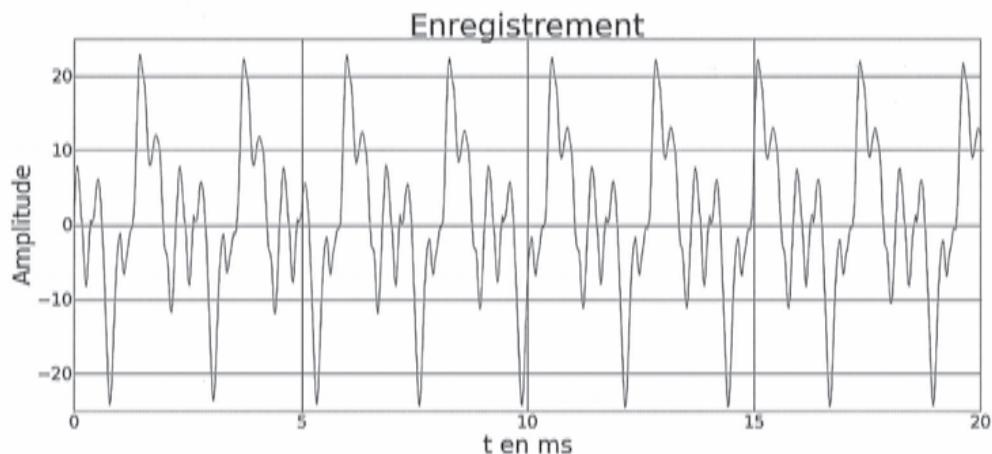
### C / Spectre d'un instrument de musique

*Les instruments de musique n'émettent pas des sons harmoniques comme ceux des sous-parties A et B. Nous allons dans cette sous-partie étudier le son d'un instrument à vent.*

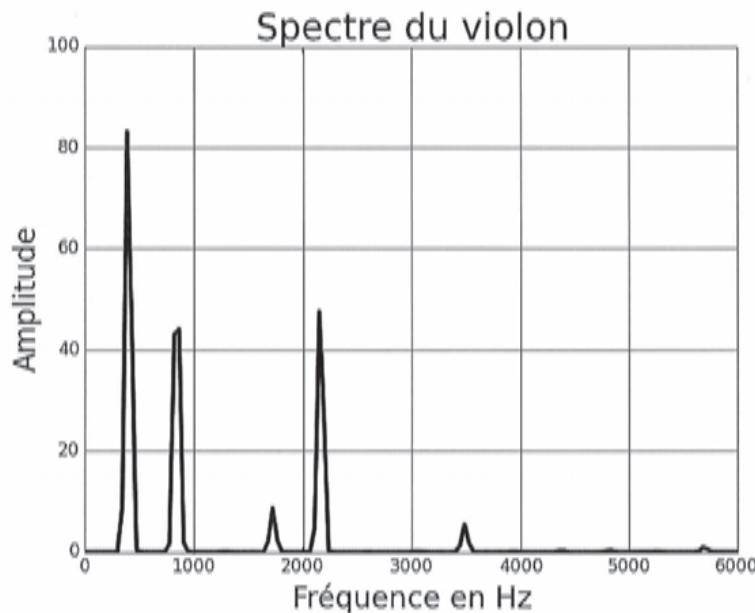
**C1.** Quelle est la différence entre le spectre d'un son créé par un instrument de musique (une flûte par exemple) et le spectre d'un bruit ? On rappelle qu'un bruit est un signal où toutes les fréquences sont présentes.

Expliquer pourquoi on peut utiliser les résultats des ondes harmoniques (sous-partie B) pour l'étude des sons des instruments.

**C2.** La figure 2 ci-dessous donne l'acquisition d'un son émis par un violon (figure 2.a) et son spectre (figure 2.b).



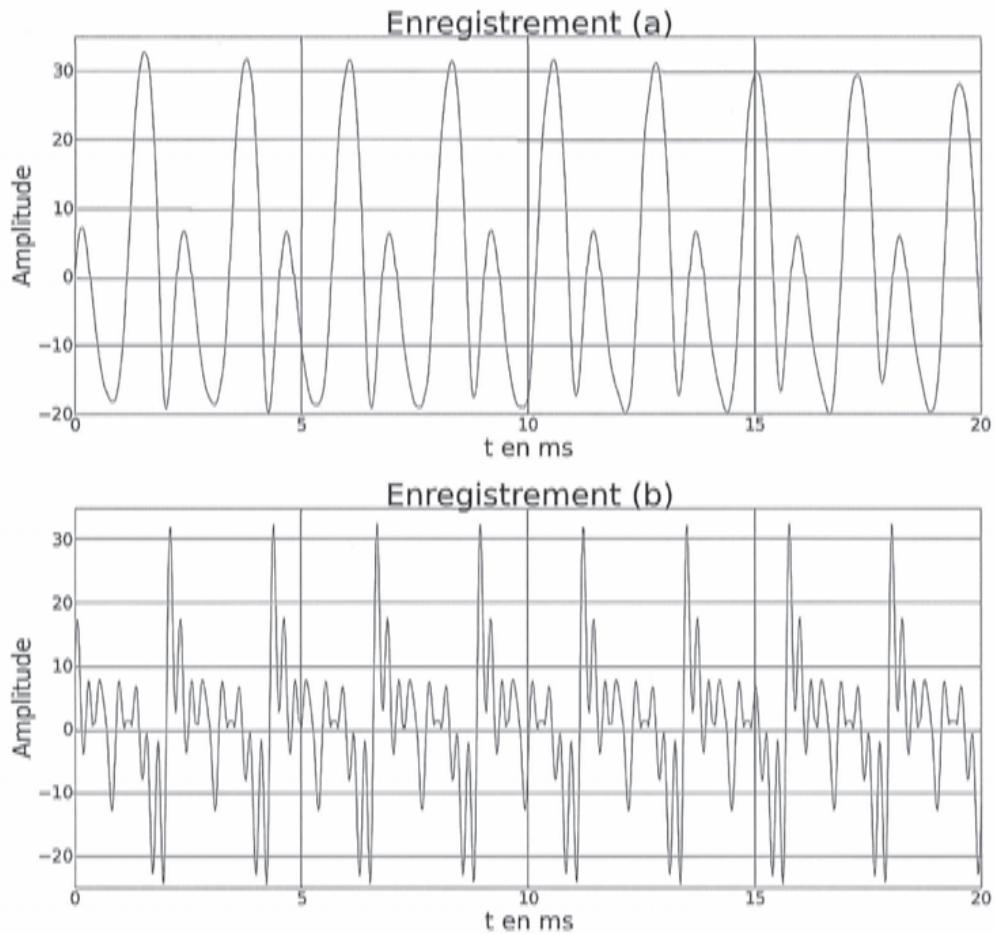
**Figure 2.a** - Enregistrement d'un son émis par un violon  
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)



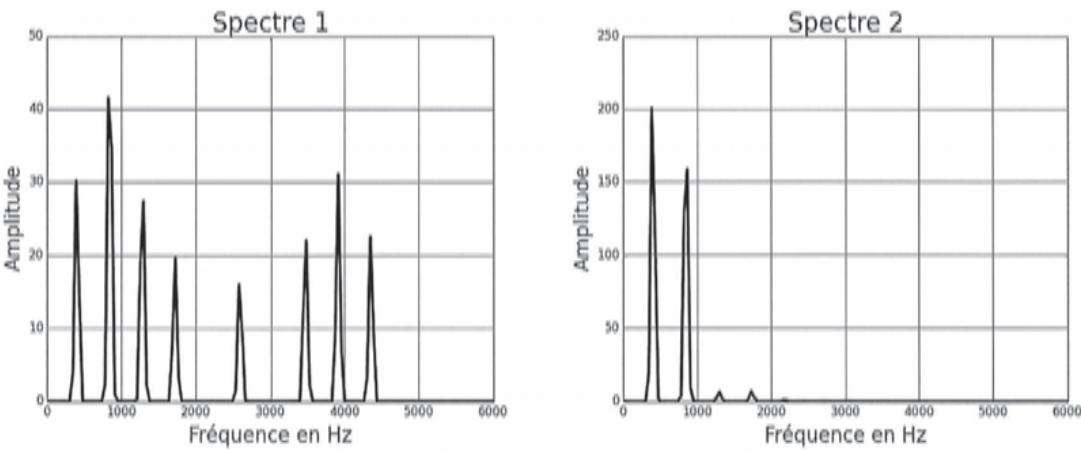
**Figure 2.b** – Spectre du même son émis par le violon  
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)

**C2a.** Mesurer la fréquence de la note et sa période en expliquant votre démarche, notamment en complétant les figures ci-dessus. Les résultats sont-ils compatibles entre les deux figures ?

La figure 3.a ci-dessous donne les acquisitions de deux sons (émis par une flûte (a) et par un harmonium (b)) qui correspondent à la même note. La figure 3.b. donne le spectre de ces deux instruments mais ils ont été mélangés.



**Figure 3.a** - Enregistrements de sons émis par une flûte (a) et par un harmonium (b)  
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)



**Figure 3.b** - Spectres correspondants  
(l'amplitude est graduée en unité arbitraire)

**C2b.** Attribuer à chaque spectre (1 et 2) son instrument (flûte (a) ou harmonium (b)) en justifiant ce choix.

**C3.** Pour calculer le spectre d'un signal sonore, on fait une acquisition numérique du son, puis on réalise la FFT (« Fast Fourier Transform » ou « transformée de Fourier rapide » en français) du signal numérique. Pour que le spectre soit correct, il faut prendre quelques précautions, notamment dans le choix de la fréquence d'échantillonnage.

*On pourra utiliser avantageusement des schémas pour répondre aux questions suivantes.*

**C3a.** Quel critère doit respecter la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  ?

Quel est le nom du phénomène qui apparaîtrait dans le cas d'un mauvais choix de  $f_e$  ?

Proposer une fréquence d'échantillonnage  $f_e$  sachant que les fréquences audibles vont de 20 Hz à 20 kHz. Justifier.

**C3b.** Citer une situation dans laquelle le critère de la question C3a n'est pas vérifié.

Comment procéder expérimentalement pour éviter le phénomène gênant décrit ci-dessus ?

On se propose maintenant d'écrire un script python pour calculer la transformée de Fourier d'un signal. On rappelle qu'il est indispensable de détailler les points principaux de l'algorithme ou du code avant de l'écrire, ou de commenter ses grandes lignes.

En langage python, les nombres complexes s'écrivent  $x+yj$  où  $x$  et  $y$  désignent respectivement les parties réelles et imaginaires du complexe (il est impératif de coller  $y$  et  $j$  et d'écrire le nombre  $y$  : le nombre  $j$  s'écrit  $1j$ ). Les principales commandes peuvent être illustrées par

```

z=2+3j                      # Définition d'un complexe z
t=z**3+2*z/ (1+1j)          # Calculs
z.conjugate()                 # Renvoie le conjugué de z
abs (z)                      # Module

```

De plus, le module `numpy` de python permet de manipuler les nombres complexes simplement. En effet, la fonction `exp` (calcul de l'exponentielle) de ce module, que l'on supposera importée, accepte un argument complexe et réalise le calcul mathématique attendu. Enfin, on supposera aussi importée `pi`, variable du module `numpy` qui contient la valeur flottante de la constante mathématique  $\pi$ . Seules `pi` et `exp` seront supposées importées au début du programme.

La transformée Fourier d'un tableau  $T$  de taille  $N$  est un tableau  $\hat{T}$  de même taille dont les valeurs sont données par la formule suivante :

$$\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket; \quad \hat{T}_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} T_\ell \exp \left( -\frac{2j\pi k \ell}{N} \right)$$

**C4.** On va d'abord écrire un algorithme naïf.

**C4a.** Écrire une fonction `omega` prenant comme argument deux entiers `a` et `N` et renvoyant le nombre complexe  $\exp \left( -\frac{2ja\pi}{N} \right)$ .

**C4b.** En déduire une fonction `TF` renvoyant la transformée de Fourier d'un tableau `T` donné en argument.

**C4c.** Déterminer la complexité de `TF` dont l'entrée est un tableau de  $N$  éléments. On donnera la réponse en  $\Theta(f(N))$ .

**C5. Transformée de Fourier rapide**

Un autre algorithme utilisant le paradigme « diviser pour régner » a été proposé par J. Cooley et J. Tukey en 1965.

On suppose que  $N$  est pair, de la forme  $N = 2p$ . Soit  $T$  un tableau de taille  $2p$ , on note  $P$  et  $I$  les tableaux de taille  $p$  donnés par  $P = [T_0, T_2, \dots, T_{2p-2}]$  et  $I = [T_1, T_3, \dots, T_{2p-1}]$ .

On note  $\hat{P}$  et  $\hat{I}$  les transformée de Fourier de  $P$  et  $I$ .

On admet que pour tout  $k \in \llbracket 0, 2p-1 \rrbracket$ , on a, avec  $N = 2p$  :

$$\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket; \quad \hat{T}_k = \begin{cases} \hat{P}_k + \exp\left(-\frac{2j\pi k}{N}\right) \hat{I}_k & \text{si } k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \\ \hat{P}_{k-p} + \exp\left(-\frac{2j\pi k}{N}\right) \hat{I}_{k-p} & \text{si } k \in \llbracket p, 2p-1 \rrbracket \end{cases}$$

**C5a.** Écrire une fonction `separe`, qui étant donné un tableau  $\mathbb{T}$  donné en argument, renvoie un couple de tableaux  $(\mathbb{P}, \mathbb{I})$  où  $\mathbb{P}$  est constitué des éléments de  $\mathbb{T}$  d'indice pair et  $\mathbb{I}$  ceux d'indice impair.

**C5b.** On suppose que  $N$  est une puissance de 2 de la forme  $N = 2^q$ . Les tableaux  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{I}$  renvoyés par la fonction `separe` ont donc eux aussi un nombre pair d'éléments et on peut faire sur eux la même opération.

Écrire une fonction **récursive** `TFR` renvoyant la transformée de Fourier d'un tableau  $\mathbb{T}$  donné en argument en utilisant les transformées de Fourier  $\hat{\mathbb{P}}$  et  $\hat{\mathbb{I}}$  de  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{I}$  respectivement, ainsi que la fonction `omega` définie précédemment.

**C5c.** On note  $C(q)$  le nombre d'appels récursifs nécessaires au calcul de la transformée de Fourier rapide d'une liste de  $2^q$  éléments avec l'algorithme ci-dessus.

(a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par  $C(q)$ .

(b) En déduire  $C(q)$  en fonction de  $q$ , puis en fonction de  $N$ .

**C5d.** Laquelle des deux fonctions `TF` ou `TFR` vous semble la plus efficace ? Justifier.

**D / Problèmes à résoudre lors de concerts**

Les questions qui sont posées dans cette sous-partie demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être indiquées même si elles n'aboutissent pas. Le barème tiendra compte du temps nécessaire pour répondre à de telles questions et les valorisera. On pourra utiliser la figure 1 et tous les résultats précédemment obtenus.

**D1.** Au cours d'un concert, dès que le chanteur passe devant le haut-parleur, il se met à y avoir un sifflement très désagréable.

Expliquer l'apparition de ce sifflement.

**D2.** Les enfants d'une classe participent à un concours de chant en plein air où les parents de plusieurs dizaines d'écoles les écoutent sur un terrain de sport de largeur 50 m. Pour que tout le monde entende, un micro enregistre leur chanson et un haut-parleur le restitue et l'amplifie pour les parents.

À quelle distance des haut-parleurs doit-on placer le premier rang ?

**D3.** Lors d'un concert de piano-chant, le chant du soliste fait 65 dB, tandis que la musique du piano atteint 80 dB. Par conséquent, on n'entend pas le chant du soliste.

Le chef de chœur vous demande alors combien il faudrait de chanteurs pour qu'on entende le chant.

Répondre à sa question.

## E / Base de données d'une école de musique

Toutes les requêtes s'écriront en langage SQL (MySQL ou SQLite).

L'école de Musique de La Rochelle (EMuLaR) a fait classer tous ses membres dans une base de données dont voici le schéma :

**eleves** (**id** : entier, **nom** : chaîne de caractères, **prenom** : chaîne de caractères, **date\_naissance** : entier)  
**instruments** (**id\_instrument** : entier, **id\_eleve** : entier, **date\_debut** : entier)

Les notations non évidentes seront expliquées en temps voulu.

**E1.** Que sont **id**, **nom**, **prenom** et **date\_naissance** pour la table **eleves** ?

Donner un choix de clé primaire pour la table **eleves**.

Comment s'appelle l'opération qui ne renvoie que **id** et **nom** ?

Écrire cette opération dans le langage de l'algèbre relationnelle, puis la requête correspondante.

**E2.** Le format de l'entier **date\_naissance** de la table **eleves**, qui donne la date de naissance de l'élève, doit contenir le jour noté **jj**, le mois noté **mm** et l'année notée **aaaa**.

Quel est le format le plus adapté pour classer les élèves du plus vieux au plus jeune :

**jjmmaaaa**, **jjaaaamm**, **mmjaaaa**, **mmaaaajj**, **aaaajjmm** ou **aaaammjj** ? Justifier brièvement.

En supposant que ce format a été choisi, écrire la requête qui renvoie les noms et prénoms des élèves classés par date de naissance.

**E3.** Écrire la requête permettant d'obtenir les **id**, **nom**, **prenom** et **date\_naissance** des élèves nés après l'an 2000 (exclu).

Comment s'appelle l'opération correspondante ?

Écrire cette opération dans le langage de l'algèbre relationnelle.

**E4.** L'année **date\_debut** (au format **aaaa**) est l'année où l'élève d'identifiant **id\_eleve** (faisant référence à un **id** de la table **eleve**) a débuté l'instrument d'identifiant **id\_instrument**.

(a) Sachant que l'identifiant du violon est le **23**, écrire une requête permettant d'obtenir le nom et le prénom des élèves jouant du violon.

(b) Écrire une requête permettant d'obtenir l'ensemble des noms et prénoms des élèves jouant du violon depuis 10 ans ou plus en utilisant la commande **JOIN**.

**E5.** Écrire une requête qui donne le nom et le prénom de(s) l'élève(s) de l'école qui y étudie(nt) depuis le plus longtemps.

## F / Isolation acoustique

Bien sûr, on ne peut pas faire un concert n'importe où n'importe comment : il y a une réglementation sur les nuisances sonores et les pièces doivent être insonorisées. On s'intéresse ici à l'isolation acoustique d'une pièce où des musiciens font leurs répétitions. On prendra  $c = 3,4 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$  pour les applications numériques.

**F1.** On considère les deux instruments ci-dessous : une flûte piccolo, de longueur 33 cm et un trombone, dont le tube a une longueur totale de 2,7 m.



**Figure 4** – Piccolo (en haut) et trombone (en bas)

**F1a.** Estimer la fréquence minimale pour chaque instrument en faisant une analogie avec la corde vibrante. Expliquer pourquoi c'est la fréquence minimale.

**F1b.** Les notes les plus jouées de chaque instrument s'étagent sur 2 octaves. Sachant qu'une octave correspond à un doublement de fréquence, déterminer la fréquence maximale de chaque instrument.

On travaillera désormais avec 125 Hz pour un instrument et 1000 Hz pour l'autre.

**F2.** Les musiciens répètent dans un garage dont toutes les parois sont en parpaing (blocs de béton), la porte du garage ayant été condamnée dès le début des répétitions. Les voisins s'étant plaints du bruit, une étude acoustique a été réalisée : l'intensité sonore chez les voisins atteint 55 dB pour le piccolo et 60 dB pour le trombone. Or, on peut considérer qu'un bruit est gênant quand il est situé au-dessus de la courbe isophonique la plus basse des deux dans la figure 1.

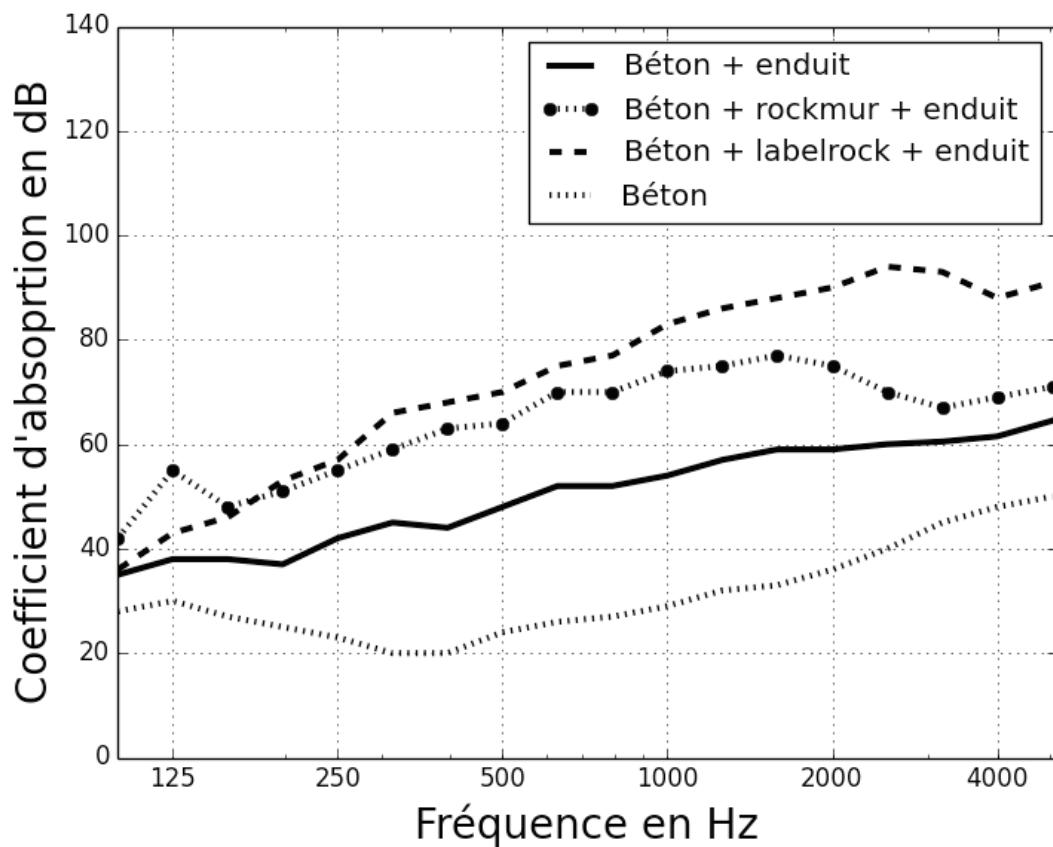
Est-il nécessaire d'effectuer des travaux d'isolation phonique quand c'est la flûte qui est jouée ? Quand c'est le trombone ? Justifier.

**F3.** Les propriétaires décident de faire des travaux. On leur propose 3 solutions :

- poser un enduit sur les murs en parpaing pour 30 € par  $\text{m}^2$  ;
- poser un isolant intérieur : labelrock à 13 €/m<sup>2</sup> ou rockmur à 8 €/m<sup>2</sup> ;
- poser un enduit ET un isolant intérieur.

La figure 5 donne le coefficient d'absorption en dB de ces différents revêtements en fonction de la fréquence du son.

Quelle est la meilleure solution en termes de coût et d'efficacité si on ne joue que de la flûte dans le garage ? Que du trombone ? Les deux séparément ? Les deux en même temps ?



**Figure 5** - Coefficient d'absorption en dB en fonction de la fréquence

## DEUXIÈME PARTIE

### Les ondes électromagnétiques dans les plasmas

*Nous sommes loin du temps où le « *cursus publicus* », le service de poste de l’Empire Romain parcourait 250 km par jour, 24 heures sur 24, ce qui était déjà une prouesse technique. Depuis, Charles Wheatstone a effectué la première transmission télégraphique entre Londres et Birmingham en 1838, et en 1964, le premier satellite de télécommunications SYNCOM 3 est lancé par les Etats-Unis.*

*Ce satellite a permis de développer de façon significative les télécommunications longue-distance, transatlantiques notamment, puisqu’auparavant, il fallait se contenter de câbles transatlantiques (en 1956, le câble transatlantique TAT-1 peut transporter 35 communications téléphoniques), ou d’ondes radio hyperfréquence qui se réfléchissent sur l’ionosphère, tributaires de ce fait des orages magnétiques et des tempêtes solaires. En effet, il existe autour de la Terre une couche nommée ionosphère, constituée d’un plasma très peu dense.*

*Nous allons dans cette partie étudier la propagation des ondes dans un plasma : d’abord des ondes harmoniques, puis des ondes décrivant mieux la réalité.*

#### G. Mise en équation pour des ondes harmoniques

On considère l’ionosphère comme un gaz ionisé contenant

- des électrons de masse  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg et de charge  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C ;
- des ions de masse  $m_i$  et de charge  $+e$ .

Les densités volumiques de ces deux types de particules sont identiques et sont notées  $n$ . Le plasma est suffisamment dilué pour qu’on puisse considérer que les électrons et ions n’interagissent pas entre eux.

On considèrera dans toute cette sous-partie des évolutions harmoniques à la pulsation  $\omega$ .

**G1.** Dans cette question, on va déterminer les relations qui permettront d’adapter les équations de Maxwell au plasma.

**G1a.** Montrer que la charge volumique est nulle au sein du plasma.

**G1b.** Lors du passage d’une onde électromagnétique dans le plasma, à quelle condition peut-on négliger l’effet du champ magnétique  $\vec{B}$  devant celui du champ électrique  $\vec{E}$  pour le mouvement des charges ?

À quelle condition peut-on négliger le mouvement des ions devant le mouvement des électrons ?

**G1c.** Montrer qu’on peut négliger les effets de la pesanteur.

On supposera qu’on peut faire par la suite les trois approximations ci-dessus : négliger le champ magnétique, négliger le mouvement des ions et négliger la pesanteur.

**G1d.** On considère le champ électrique complexe noté  $\underline{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp[j(\omega t - \varphi_M)]$  au point  $M$  du plasma. On note  $\vec{j}_e$  le vecteur densité volumique de courant électrique complexe.

En étudiant le mouvement d’un électron, établir la relation  $\vec{j}_e = \gamma \vec{E}$ .

Donner le nom et l’expression de  $\gamma$  en fonction notamment des paramètres du plasma.

**G2.** Écrire les équations de Maxwell adaptées au plasma.

**G3.** En déduire l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique complexe pour une onde harmonique et montrer que son expression générale dans le cas d'une onde quelconque s'écrit

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2 \vec{E} \right)$$

On rappelle la formule du double rotationnel :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta \vec{E}$ .

Comment s'appelle  $\omega_p$ ? Donner son expression en fonction notamment des caractéristiques du plasma.

On s'intéresse désormais à des ondes planes progressives (OPP) qui se propagent vers les  $x$  croissants dans un plasma semi-infini compris entre  $x = 0$  et  $x \rightarrow +\infty$ .

## H. Propagation d'une OPPH

On s'intéresse dans cette sous-partie à des ondes planes progressives harmoniques (OPPH) de champ électrique  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp[j(\omega t - kx)]$ .

**H1.** Établir la relation de dispersion et en déduire l'existence de deux domaines de pulsations : le domaine de transparence et le domaine réactif. Identifier chacun des deux.

**H2.** Dans le domaine réactif, déterminer complètement l'expression du vecteur d'onde  $k$  et du champ électrique  $\vec{E}$  en notation complexe dans le plasma.

Que devient une OPPH dans le domaine réactif qui arrive sur le plasma ? Citez une application.

**H3.** Dans le domaine de transparence, déterminer l'expression de la vitesse de phase  $v_\phi$  et de la vitesse de groupe  $v_g$  de l'onde de champ électrique, après avoir donné leur définition en fonction du vecteur d'onde  $k$  et de la pulsation  $\omega$ . On les exprimera en fonction de  $\omega$  et  $c$  notamment.

Que devient une OPPH dans le domaine de transparence qui arrive sur le plasma ? Citez une application.

**H4.** Tracer l'allure de  $v_\phi$  et de  $v_g$  en fonction de la pulsation  $\omega$ . Commenter. Que se passe-t-il à la limite en  $\omega \rightarrow \infty$  ?

## I. Propagation d'un paquet d'ondes émis par une antenne satellite

On travaille ici uniquement dans le domaine de transparence.

**I1.** Expliquer pourquoi une onde harmonique n'existe pas. Justifier qu'on puisse considérer l'onde comme plane.

**I2.** On a représenté sur la figure 6. la représentation d'un paquet d'onde gaussien en fonction de  $x$  à l'instant  $t_0$ .

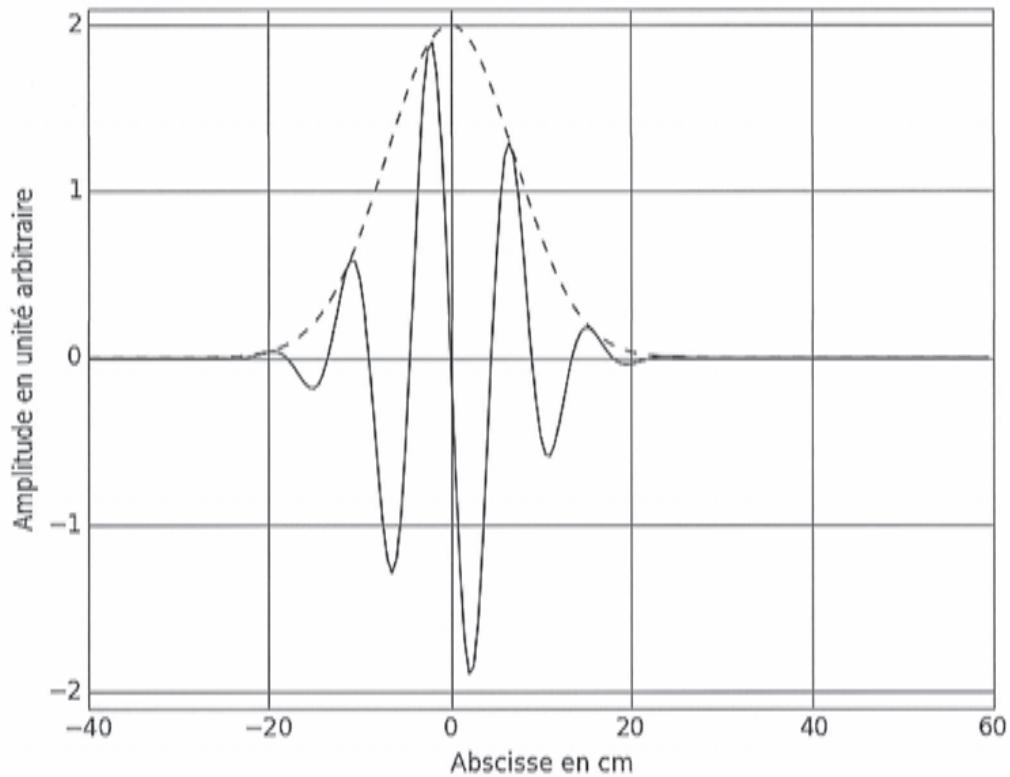


Figure 6. - Paquet d'onde

Tracer l'allure de son spectre.

Tracer sur le document réponse l'allure du paquet d'onde un court instant plus tard (le paquet d'onde doit être visible sur le graphe et on doit faire la différence avec le tracé à l'instant  $t_0$ ) :

- sur la figure 7.a., si la vitesse de groupe est le double de la vitesse de phase ( $v_g = 2 v_\phi$ ) ;
- sur la figure 7.b., si la vitesse de groupe est la moitié de la vitesse de phase ( $v_\phi = 2 v_g$ ) .

On notera que ces choix de vitesses ne sont pas forcément compatibles avec la partie précédente.

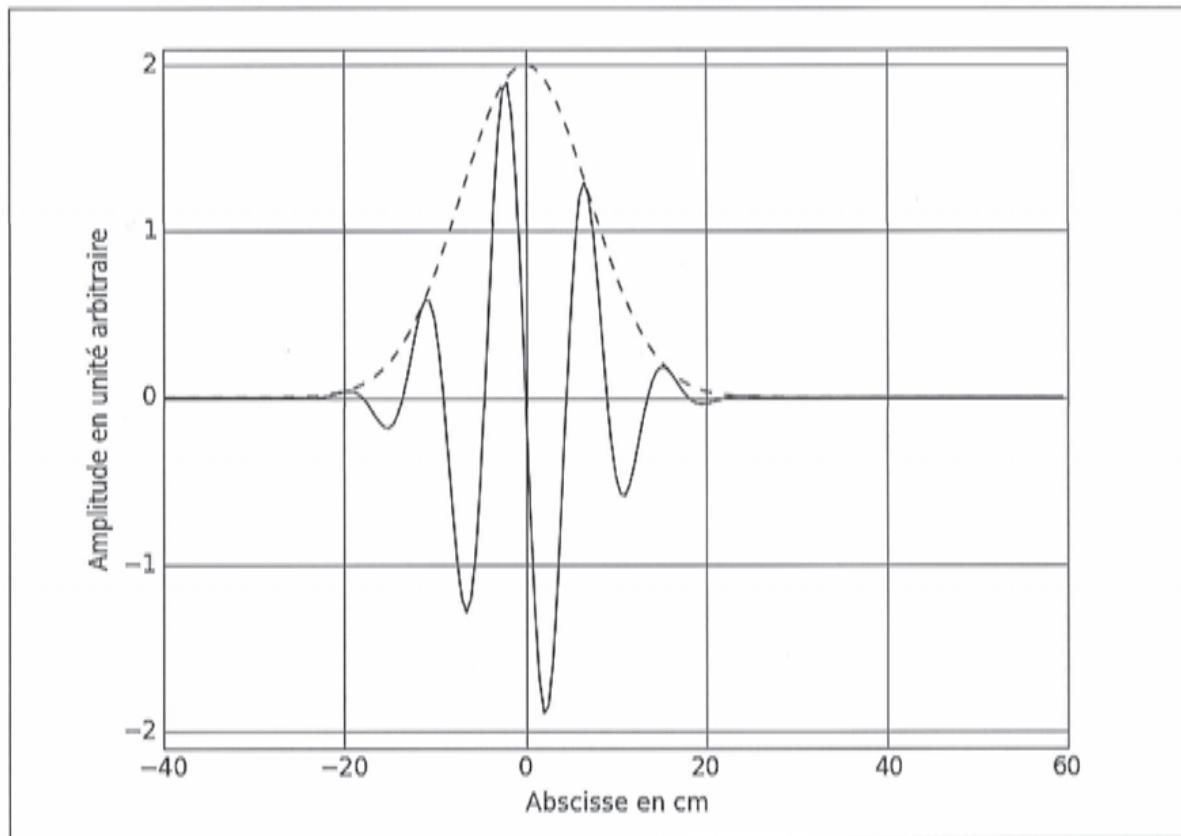


Figure 7.a. – Cas d'une vitesse de groupe double de la vitesse de phase

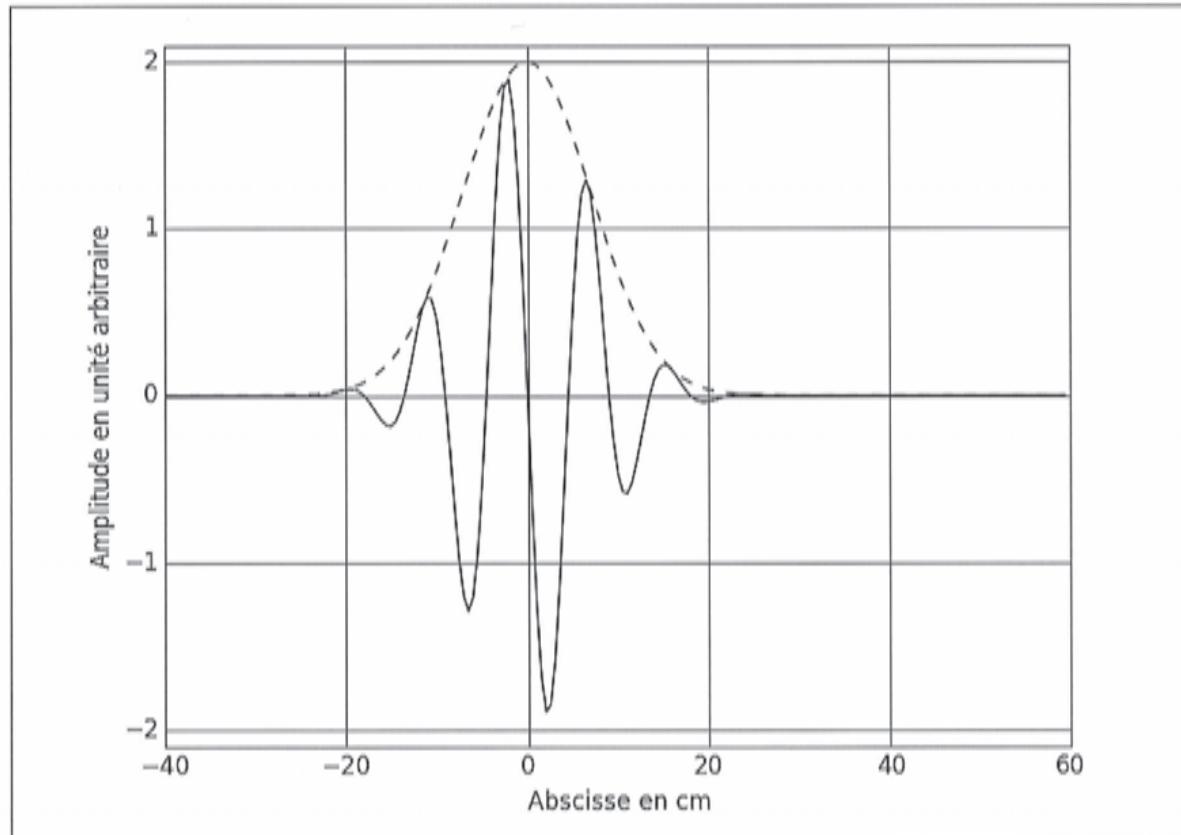


Figure 7.b. – Cas d'une vitesse de groupe moitié de la vitesse de phase

## Synthèse

Synthétiser en quelques lignes les particularités des ondes non harmoniques. On s'appuiera sur les deux parties.

**FIN DE L' PREUVE**

# Epreuve de physique-Modélisation

Durée 4h

Présentation du sujet :

Ce sujet s'intéressait à deux types d'ondes : les ondes sonores et les ondes électromagnétiques dans les plasmas, dans le but d'étudier des phénomènes liés à la non-harmonicité des ondes réelles.

La première partie, après une mise en équation des ondes sonores (A) et une étude des ondes harmoniques (B), s'intéresse plus particulièrement aux sons émis par des instruments de musique. On aborde ainsi successivement l'étude et le calcul informatique des spectres (C), des résolutions de problèmes survenant lors de concerts (D), le choix d'une isolation phonique (F). On étudie également la base de données d'une école de musique (E). On s'intéresse dans cette première partie plutôt aux spectres discrets.

La deuxième partie commence aussi par la mise en équation de l'onde électromagnétique dans les plasmas (G) et l'étude des ondes harmoniques (H) dans le domaine de transparence et le domaine réactif. On envisage ensuite la propagation d'un paquet d'ondes (I) dans un milieu dispersif.

Le sujet se termine par une synthèse où l'étudiant est invité à discuter de problèmes rencontrés avec les ondes non harmoniques.

## Commentaire général sur l'épreuve :

Ce sujet a été volontairement écrit avec de nombreuses questions proches du cours, afin de permettre aux étudiants ayant travaillé sérieusement toute l'année de faire la différence avec les autres. Ce choix a imposé de traiter qu'une partie assez restreinte, mais très importante, du programme de la filière.

Le sujet était également un peu long afin de laisser aux candidats la possibilité de passer certaines parties plus difficiles pour eux. Cela a été le cas notamment pour les résolutions de problèmes, ou les questions d'informatique, mais parfois aussi pour la mise en équation des ondes sonores.

La moyenne sur 20 a été, après traitement informatique, de 9,42 avec un écart-type de 3,96. Les copies corrigées ont des niveaux très hétérogènes, avec de très bonnes copies, où l'étude scientifique rigoureuse est associée à une rédaction claire, un français correct et une écriture compréhensible. Il y a malheureusement beaucoup trop de copies qui ne présentent aucune de ces qualités.

Pour corriger les défauts les plus notables et les plus graves constatés par les membres du jury, ceux-ci conseillent aux futurs candidats les actions suivantes :

Travailler régulièrement tout au long des années de PCSI et de PC, et considérer tout devoir donné par les professeurs comme un entraînement aux concours et pour cela, soigner l'écriture, l'orthographe, la grammaire et la rédaction comme si c'était le jour J.

Faire l'accord au pluriel (attention, les verbes ne s'accordent pas comme les noms et les adjectifs), différencier les infinitifs et les participes passés (en utilisant un verbe du deuxième ou troisième groupe par exemple), au minimum.

Mettre une flèche sur les vecteurs, et pas sur les scalaires ; ne pas égaliser un vecteur et un scalaire ; ne pas diviser par un vecteur ; connaître la nature vectorielle ou scalaire des opérateurs vectoriels.

Expliquer, même succinctement le passage d'une ligne de calcul à la suivante au lieu de les enchaîner sans organisation. « Donc », « alors », « d'où » voire le célèbre « du coup » ... permettent d'indiquer un lien direct de cause à effet ; « or », « de plus » ... permettent d'ajouter un nouvel argument, alors accompagné de son origine : « équation de Maxwell-Gauss », « équation (E) » ou autre. Conformément à ce qui est écrit sur la page de garde du sujet, l'absence de rédaction est fortement pénalisée, dès l'écriture du barème, où de nombreux points sont accordés pour l'explication ou la justification et non pour le résultat.

Répondre correctement aux questions nécessite de lire correctement l'énoncé (sur le sujet) mais également la question : « établir » une équation n'est pas la même chose que la « donner », répondre à une question qui demande des explications n'est pas la paraphraser.

De plus :

Toutes les vitesses ne sont pas interchangeables : la vitesse de l'onde n'est pas celle des particules de fluide, ni la vitesse quadratique moyenne. La pression atmosphérique n'est pas la surpression ni l'amplitude de la surpression. De même les durées (un temps de propagation n'est pas une période), les distances (la longueur d'un tuyau n'est pas la longueur d'onde) ou les surfaces (la surface du terrain n'a rien à voir avec la surface où on reçoit le son). Il y a encore d'autres exemples.

Toutes les grandeurs nommées «  $v$  » ou «  $V$  » ne sont pas forcément des vitesses, il y a des volumes, et ce n'est pas interchangeable.

## Analyse par partie :

### A/ Mise en équation

Partie très inégalement traitée, parfois passée par les élèves, alors que c'est la base du cours des ondes sonores. Justifier la linéarisation ne consiste pas à dire « en négligeant les termes d'ordre deux », mais nécessite au minimum de les identifier. Volume et vitesse sont deux grandeurs différentes, même si ils sont notés par la même lettre le plus souvent.

A1. La dérivée particulière (ou son expression) est évidemment nécessaire, il faut identifier les termes infiniment petits d'ordre 2 avant de les négliger, préciser les termes constants dont la dérivée est nulle, et ne pas perdre trop de temps à négliger la pesanteur et la viscosité que l'énoncé dit de négliger. Il faudrait que la différence soit plus visible entre  $p$  et  $\rho$ .

A2. Assez peu d'équations correctes, linéarisation non expliquée, utilisation fantaisiste des vecteurs.

A3. Encore plus mal traitée. La définition de  $\chi_s$  est parfois fantaisiste. La linéarisation consiste en général à remplacer la dérivée par le rapport des petites variations sans rien expliquer.

A4. Inutile d'essayer d'établir l'équation d'onde sans avoir traité les 3 questions précédentes. Certains le font pourtant.

A5. L'équation de Laplace ne doit pas être utilisée sans être justifiée par le caractère adiabatique et réversible de la transformation. L'énergie cinétique d'agitation thermique n'est pas  $\frac{1}{2} m.c^2$ . Dans l'application numérique, il faut évidemment convertir la masse molaire en  $\text{kg.mol}^{-1}$ . Il est inadmissible de proposer une vitesse du son de  $10 \text{ m.s}^{-1}$  après 2 années de Prépa.

#### B/ Étude d'une onde harmonique

Cette sous-partie pouvait être partiellement traitée par les élèves n'ayant pas réussi la partie précédente grâce à l'équation d'onde donnée en partie A.

B1. Catastrophique pour la plupart des élèves. On ne peut pas répondre « elle est plane, progressive et harmonique parce qu'elle a la forme d'une OPPH », ni justifier toutes les affirmations par « elle est en  $\omega t - kx$  ». Très peu d'élèves ont donné 4 explications correctes. Une onde plane ne se propage pas dans un plan.

B2. « Établir » nécessite de faire des calculs, pas de donner juste le résultat (certes connu). Le commentaire sur l'absence de dispersion et/ou d'absorption est très rare, et parfois le candidat prétend même le contraire.

B3. L'impédance acoustique ne peut pas avoir pour expression  $p_0 / v_0$ , puisque c'est une caractéristique intrinsèque du milieu tandis que  $p_0$  et  $v_0$  dépendent de l'onde étudiée.

B4. Nécessite la réponse à la question A5. Non,  $Z$  n'est pas en  $\Omega$ .

B5. Un petit nombre d'élèves truande allègrement : «  $p$  est en Pa et  $v$  en m/s donc  $pv$  est en  $\text{W.m}^{-2}$  ». Ce comportement a évidemment été sanctionné. On ne peut pas répondre à une question d'analyse dimensionnelle sans donner l'unité (ou la dimension) de chaque terme et en expliquant comment on le sait : «  $p$  est une force surfacique qui s'exprime en  $\text{N.m}^{-2}$  donc en  $\text{kg.m}^{-1} \text{s}^{-2}$  ».

B6. Si  $I$  est l'intensité sonore, on ne peut pas avoir  $u = R.I$ , ni même  $u = Z.I$ . Identifier la différence (10 ou 20 en préfacteur) est nécessaire pour pouvoir la justifier, mais pas suffisant.

B7. Il est interdit de multiplier deux champs en notation complexe !  $p_0$  n'est pas la pression atmosphérique, mais l'amplitude de la surpression. Elles n'ont évidemment pas la même valeur numérique.

L'ordre de grandeur de l'intensité d'un son fort est souvent connue, mais le reste est rarement correct.

#### C/ Spectre d'un instrument de musique

Certains élèves n'ont fait que la partie physique ou que la partie informatique.

En informatique, il ne faut pas utiliser une variable qui n'est pas définie auparavant, ni donner une valeur à une élément d'une liste pas encore créé. L'indentation est plutôt respectée.

C1. Répéter qu'un bruit contient tous les harmoniques ne rapporte pas de point. C'est de la simple paraphrase.

C2a. Beaucoup de bonnes réponses à cette question, mais on ne peut pas exprimer la période en cm (lus sur le graphe), et il est indispensable d'utiliser les 2 figures. Des erreurs dans le comptage du nombre de périodes. Des incohérences sur les chiffres significatifs.

C2b. Non, un spectre n'a pas autant de « pics » que l'enregistrement du son correspondant.

C3a. Citer le nom du critère ne suffit pas. Beaucoup de signes <, > ou << au lieu de  $f_e > 2f_{max}$ . Rarement  $f_{max}$ .

C3b. C'était une situation concrète qui était attendue, pas un mauvais choix de fréquence d'échantillonnage.

C4. L'informatique a été assez souvent mal traitée, voire passée.

C4a. Il faut tenir compte des rappels de Python de l'énoncé et ne pas improviser des écritures inadéquates des complexes.

C4b. Il fallait évidemment renvoyer une liste de termes, calculés chacun par une boucle, attention à placer correctement l'initialisation pour qu'elle soit faite à chaque nouveau terme de la liste. La fonction « sum » n'existe pas.

C4c. Inutile de déterminer la complexité d'une fonction qu'on n'a pas écrite, ni de donner une complexité sans la démontrer.

C5a. Il faut écrire une fonction qui fait ce qui est demandé, pas tout de suite la fonction TFR. Le reste de la division euclidienne est donné par %, pas par //.

C5b. La fonction doit être récursive.

C5c et C5d. Inutile de déterminer la complexité d'une fonction qui n'est pas écrite, ni de commenter deux complexités dont on n'a pas trouvé l'expression.

#### D/ Problèmes à résoudre lors de concerts

Cette partie a été volontairement passée par de nombreux élèves, ce qui est dommage car une explication succincte des phénomènes issue d'une bonne réflexion était rapidement valorisée par le barème, même si la réponse n'est pas complète. Il y a eu majoritairement des inepties sur ces questions.

D1. C'est l'effet Larsen, dû à une boucle infinie amplificatrice entre le micro et le haut-parleur. Non, augmenter l'amplitude n'augmente pas la fréquence. Non, le micro n'émet pas d'ondes sonores. Non, le chanteur ne diffracte pas les ondes et ne se comporte pas non plus comme un miroir. La comparaison entre la distance du chanteur au haut-parleur et la longueur d'onde n'a aucun sens ici.

D2. Il s'agissait seulement d'avoir une intensité pas trop élevée pour le premier rang, et pas trop basse pour le dernier. Quasiment aucun élève n'a vu que c'était dû à la nature sphérique de l'onde sonore émise par le haut-parleur. Certains ont divisé la puissance du haut-parleur par la surface du terrain de sport pour obtenir l'intensité. D'autres ont fait des hypothèses fantaisistes sur la diminution d'amplitude en fonction de la distance. D'autres ont utilisé la vitesse du son et sa fréquence pour déterminer une distance (qui n'est autre que la longueur d'onde) censée être la distance minimale du premier rang. Nous rappelons que toutes les distances ne sont pas interchangeables, ni les durées... Non,  $d = v*t$  n'est pas la solution à toutes les questions faisant intervenir une distance, une vitesse ou une durée.

D3. La question ouverte la mieux traitée, même si souvent mal expliquée, avec des applications numériques sans équations littérales. Rappelons qu'il faut donner un nom aux différentes grandeurs utilisées avant de les utiliser. Attention, si le deuxième chanteur apporte 3 dB de plus, ce n'est pas le cas du troisième, ni des suivants. 3 dB correspondant à un doublement de l'intensité sonore, donc du nombre de chanteurs.

#### E/ Base de données d'une école de musique

Le langage de l'algèbre relationnelle est quasiment inconnu des élèves, beaucoup de confusions pour le langage SQL

E1. SELECT n'est pas remplacable par CHOICE, FIND, IMPORT ou autre.

E2. Une justification claire était attendue, et a souvent été donnée par les élèves ayant traité cette question. Pas de point sans justification.

E3. Près d'un quart des élèves ne comprend pas APRÈS ou INCLUS. WHERE n'est pas remplacable par WHEN

E4. Peu d'élèves savent faire une jointure en donnant la condition de jointure ON.

(b) Il y avait 2 conditions à respecter.

E5. Très peu abordé.

## F/ Isolation acoustique

Beaucoup d'élèves énoncent des résultats sans aucune justification numérique, ce qui est pénalisé.

F1a.  $d = v*t$  a encore été utilisé à tort et à travers, alors qu'un simple tracé aurait permis de retrouver la formule des fréquences propres. En l'absence (volontaire) d'indications de l'énoncé, le choix de conditions aux limites différentes à chaque extrémité a été accepté aussi bien que celui de conditions aux limites identiques. Très mauvaise gestion des chiffres significatifs.

F1b. Des erreurs malgré la simplicité de la question (\*2 et \*3 notamment).

F2. Trop peu de réponses argumentées par des valeurs numériques lues sur le graphe, ce qui est pourtant nécessaire.

F3. Même chose. Le but n'était pas de chercher le meilleur isolant, mais de trouver quel était l'isolant le moins cher qui permettait d'isoler suffisamment. Il fallait bien sûr regarder l'écart d'absorption entre le béton nu et les bétons isolés, et non l'absorption totale. Il était intéressant de s'intéresser à la pose d'un isolant phonique seul, même si la situation n'était pas envisagée sur le graphe à cause du prix plus faible.

## G/ Mise en équation des ondes harmoniques

Même si la vérification des hypothèses est assez mal faite, la mise en équation est plutôt correcte.

G1a. Il est vain de partir de l'équation de Maxwell-Gauss pour répondre à cette question, puisque le champ électrique n'est pas donné.

G1b. On ne peut pas comparer deux grandeurs qui n'ont pas la même dimension, comme les champs électrique et magnétique. On ne peut comparer que leurs effets, c'est-à-dire les forces.

G1c. Une application numérique du rapport des forces était demandée, pas la simple évocation de la faible masse de l'électron.

G1d. Il fallait utiliser le modèle du plasma, et non du conducteur ohmique : il n'y a pas de force de frottements dans un plasma dilué. Une intégration par rapport au temps n'est pas forcément une multiplication par  $t$ , cela ne marche que pour les constantes. A part ça et les forces non négligées alors que les questions précédentes le demandaient, un assez grand nombre de bonnes réponses.

G2. Beaucoup de bonnes réponses, mais certains élèves ne connaissent pas correctement les 4 équations de Maxwell.

G3. Mise en équation plutôt correcte, mais manque cruel d'explications du passage d'une ligne à l'autre, ce qui a été fortement pénalisé. Quelques truandages pour l'introduction de la pulsation de plasma et des erreurs de parenthèses. Certains établissent l'équation d'onde dans le vide, en supprimant allègrement la densité de courant électrique qu'ils se sont employés à trouver un peu plus tôt.

## H/ Propagation des OPPH

H1. Établir, c'est monter, pas énoncer. Cependant, il ne faut pas repartir des équations de Maxwell, mais de l'équation d'onde, même si elle n'a pas été trouvée, puisqu'elle est fournie. L'identification des deux domaines n'a souvent pas été justifiée par la forme du vecteur d'onde et des solutions. Confusion entre les domaines.

H2. Il faut prendre le cas où le vecteur d'onde est imaginaire pur. Certains candidats disent que l'onde est évanescante alors que leur expression du champ électrique correspond à une onde progressive ou divergente.

H3. Les définitions des vitesses de groupe et de phase sont plutôt bien connues, mais leur calcul pose problème.

H4. Mauvaise lecture de l'énoncé pour un grand nombre de ceux qui ont répondu à la question : on ne demande pas de tracer un paquet d'onde (on est dans la partie OPPH, et c'est posé après), mais bien le graphe des deux vitesses en fonction de la pulsation.

I/ Propagation d'un paquet d'ondes émis par une antenne satellite

I1. La question porte sur la justification ou pas de l'utilisation des OPPH précédemment étudiées pour modéliser des ondes réelles. L'argument qui dit qu'on a pris des champs ne dépendant que de  $x$  est donc hors sujet.

I2. Pour le tracé, peu de réponses, mais presque toutes fausses : l'onde ne « sort » pas du paquet d'onde sous prétexte que les vitesses de groupe et de phase sont différentes ; la fréquence des oscillations ne change pas, pas plus que son amplitude puisque le milieu n'est pas absorbant ; le paquet d'onde ne s'étale pas et l'onde ne part pas non plus vers la gauche. Il faut plus soigner les figures.

Synthèse

Peu d'élèves ont proposé un commentaire et moins encore un commentaire pertinent s'appuyant sur les deux parties. « Les calculs sont plus compliqués quand ce n'est pas une OPPH » n'est pas une réponse recevable.

**CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH****Épreuve de Physique-Modélisation PC**

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**L'usage de calculatrices est autorisé.**

**AVERTISSEMENT**

**Le candidat devra porter l'ensemble de ses réponses sur le cahier réponses, à l'exclusion de toute autre copie. Les résultats doivent être reportés dans les cadres prévus à cet effet.**

**Remarques préliminaires**

- Les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques.
- Les résultats exprimés sans unité ne seront pas comptabilisés.
- Plusieurs questions demandent une explication qualitative. Il est attendu des réponses claires et concises (moins de 10 lignes).
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le(la) candidat(e).
- Tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet de fournir des informations et d'aider à la compréhension du problème mais ne contiennent pas de questions.

**Remarques pour les questions de programmation**

- Toutes les questions d'informatique comportent une mention du type « Écrire en langage Python... ». Les codes doivent être écrits en langage Python.
- On se limitera aux types suivant : entiers, flottants, chaînes de caractères, listes, tableaux (array du module numpy) et tuples.
- On se limitera aux mots clés suivants : `if`, `elif`, `else`, `while`, `for`, `in`, `def`, `return`, `and`, `or`, `not`, `True`, `False`, `import`, `from`, `as` et `None`.
- On se limitera aux fonctions et méthodes de la bibliothèque standard suivante : `print`, `plot`, `range`, `enumerate`, `len` et `append`.
- **Les codes ne respectant pas les consignes précédentes ne seront pas comptabilisés.**

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

**Tournez la page S.V.P.**

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

## Rappel sur la notation complexe

Dans tout le sujet, on associe à une grandeur sinusoïdale  $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$  la grandeur complexe  $\underline{V}(t) = \underline{V}_0 e^{j\omega t}$  avec  $\underline{V}_0 = V_0 e^{j\phi}$  (où  $j^2 = -1$ ) et telle que  $V(t) = \text{Re}(\underline{V}(t))$ , où  $\text{Re}$  est la partie réelle.

## Données

- distance Terre-Soleil :  $d_{ST} = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$
- rayon de la Terre :  $R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$
- rayon du Soleil :  $R_S = 7,0 \times 10^8 \text{ m}$
- masse du Soleil :  $m_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$
- constante de gravitation universelle :  $\mathcal{G} = 6,7 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
- constante d'Avogadro :  $\mathcal{N}_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- masse d'un proton  $\text{H}^+$  :  $m_p = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- masse d'un électron  $e^-$  :  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- charge élémentaire :  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- constante des gaz parfaits :  $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- constante de Boltzmann :  $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- vitesse de lumière dans le vide :  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Ce problème constitué de deux parties indépendantes s'intéresse à la production et à l'acheminement de l'énergie électrique produite par une centrale photovoltaïque. La première partie étudie l'origine de l'énergie photovoltaïque, le Soleil, ainsi que la puissance électrique fournie par une cellule photovoltaïque. La deuxième partie étudie l'acheminement de l'énergie électrique jusqu'à l'utilisateur. Les sous-parties sont pour la plupart indépendantes les unes des autres.

### PREMIÈRE PARTIE

## Étude du Soleil et de son rayonnement

### A/ Approche descriptive du rayonnement du Soleil

#### Document 1 – Le rayonnement d'équilibre thermique

D'après Wikipédia : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Corps\\_noir](https://fr.wikipedia.org/wiki/Corps_noir)

Le **corps noir** est un objet idéal qui absorbe toute l'énergie électromagnétique qu'il reçoit, sans en réfléchir ni en transmettre.

En l'absence d'énergie électromagnétique extérieure, un corps noir à la température d'équilibre  $T$  émet un flux surfacique d'énergie électromagnétique dont la densité spectrale, c'est-à-dire le flux surfacique par unité de longueur d'onde émise, dépend uniquement de la longueur d'onde et de la température.

Le maximum de cette densité spectrale de flux surfacique est donné par la **loi de Wien**

$$\lambda_{max} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{T} , \quad (1)$$

avec  $\lambda_{max}$  en mètres et  $T$  en kelvins. Cette dernière loi exprime le fait que pour un corps noir, le produit de la température et de la longueur d'onde du pic de la courbe est toujours égal à une constante. Cette loi très simple permet ainsi de connaître la température d'un corps assimilé à un corps noir par la seule position de son maximum.

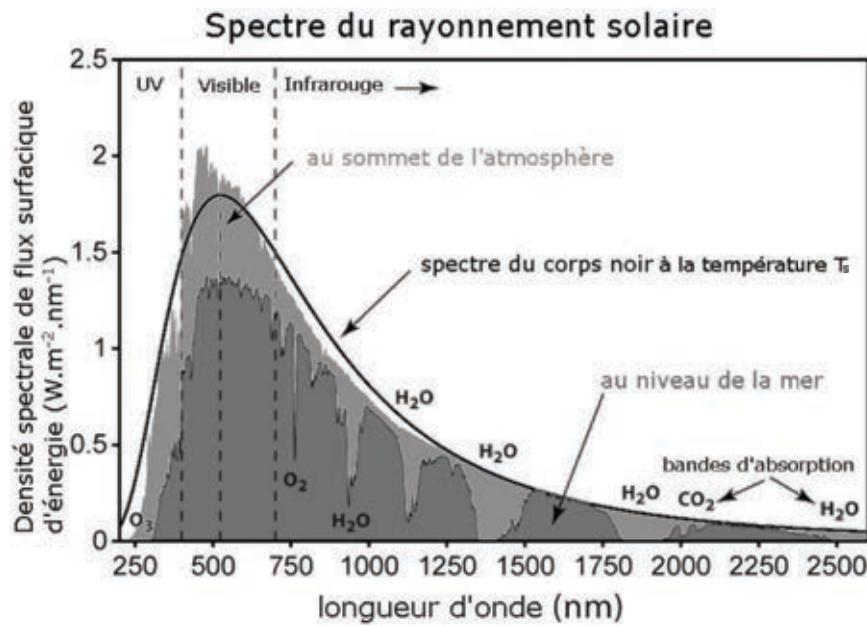
D'après la **loi de Stefan-Boltzmann**, le flux surfacique d'énergie  $\phi(T)$  (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ) émis par le corps noir varie en fonction de la température absolue  $T$  (exprimée en kelvin) selon la formule

$$\phi(T) = \sigma T^4 , \quad (2)$$

où  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann qui vaut environ  $5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .

## Document 2 – Le rayonnement solaire

D'après Wikipédia : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Rayonnement\\_solaire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Rayonnement_solaire)



On s'intéresse aux caractéristiques du rayonnement solaire (documents 1 et 2). Le candidat peut utiliser les informations des documents afin de répondre aux questions.

Dans cette partie, on assimile le Soleil à un corps noir de rayon  $R_S$ .

- A1.** Estimer la valeur numérique de la température  $T_S$  du Soleil assimilé à un corps noir. Le raisonnement devra être explicité.

- A2.** Exprimer le flux surfacique d'énergie  $\phi_S$  émis par le Soleil en fonction de  $T_S$  et de  $\sigma$ . En déduire l'expression de la puissance totale rayonnée par le Soleil  $\mathcal{P}_S$  en fonction de  $T_S$ ,  $R_S$  et  $\sigma$ .

*La distance Terre-Soleil étant très grande, les rayons solaires peuvent être considérés comme arrivant parallèlement entre eux. Ainsi, la Terre reçoit la même puissance que celle que recevrait un disque de rayon  $R_T$  placé perpendiculairement aux rayons solaires incidents.*

- A3.** Exprimer le flux surfacique d'énergie reçu par la Terre  $\phi_T$  en fonction de  $\sigma$ ,  $T_S$ ,  $R_S$  et  $d_{ST}$  et montrer que la puissance totale reçue par la Terre, notée  $\mathcal{P}_T$ , s'écrit

$$\mathcal{P}_T = \sigma T_S^4 \pi \frac{R_S^2 R_T^2}{d_{ST}^2}.$$

Faire l'application numérique de  $\phi_T$ .

*En réalité, on mesure que la Terre reçoit au niveau du sol un flux surfacique total (intégré sur toutes les longueurs d'ondes) d'énergie d'environ  $\phi'_T \simeq 900 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .*

- A4.** Proposer une explication pour l'écart entre la valeur trouvée à la question précédente pour  $\phi_T$  et celle mesurée de  $900 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . On pourra s'aider des documents.
- A5.** À partir de  $\phi'_T$ , estimer l'énergie reçue en un jour par la Terre. Comparer cette valeur à la consommation journalière de l'humanité valant environ  $1,7 \times 10^{18} \text{ J}$ . Commenter la pertinence de développer l'énergie photovoltaïque pour assurer les besoins énergétiques de l'humanité.

## B/ Estimation de la température du Soleil

*On se propose de retrouver l'ordre de grandeur de la température du Soleil par un modèle thermodynamique.*

*Le Soleil est assimilé à une sphère de rayon  $R_S$ , de centre  $O$  et de masse  $m_S$ . La masse volumique est supposée constante et égale à la masse volumique moyenne  $\rho_S$  : c'est l'hypothèse notée  $H_1$ . On utilisera les coordonnées sphériques (FIGURE 1).*

- B1.** Montrer par des considérations d'invariances et de symétries que l'expression du champ de gravitation  $\vec{g}_S(M)$  créé par le Soleil à une distance  $r$  de son centre se met sous la forme  $\vec{g}_S(M) = g_S(r) \vec{u}_r$ .
- B2.** Exprimer la masse volumique moyenne  $\rho_S$  en fonction de  $M_S$  et  $R_S$ . Par analogie avec l'électrostatique, utiliser le théorème de Gauss pour déterminer l'expression de  $g_S(r)$  lorsque  $r < R_S$  en fonction de  $\mathcal{G}$ ,  $\rho_S$  et  $r$ .

*On s'intéresse à un volume mésoscopique du Soleil, centré en un point  $M$  situé à la distance  $r$  du centre  $O$ , dont la vitesse est notée  $\vec{v}$  dans le référentiel supposé galiléen héliocentrique et dont la pression est  $P(M)$ . On néglige la viscosité.*

- B3.** Donner la définition d'un volume mésoscopique. Rappeler sans démonstration l'expression de la force volumique équivalente aux forces de pression. En appliquant la deuxième loi de Newton au volume mésoscopique considéré, retrouver l'équation d'Euler.

*Pour simplifier l'étude, le fluide constituant le Soleil est supposé au repos. Ceci constitue l'hypothèse notée  $H_2$ .*

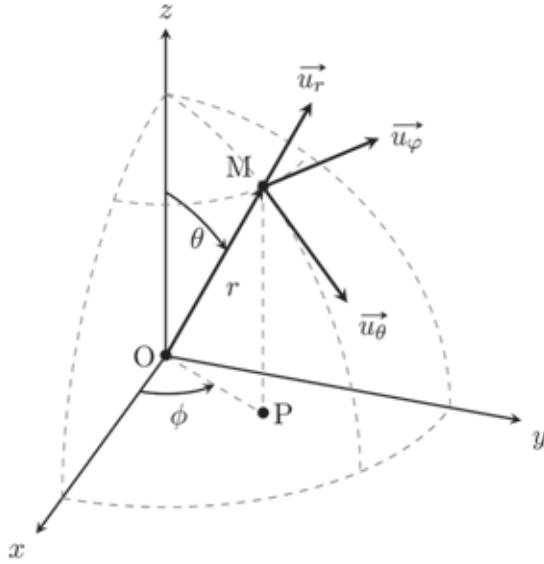


FIGURE 1 – Représentation des coordonnées sphériques. La base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$  est orthonormée.

- B4.** Simplifier l'équation d'Euler précédente pour montrer que la loi de la statique des fluides à l'intérieur du Soleil s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = -\rho_S^2 \mathcal{G} \frac{4}{3} \pi r \vec{u}_r. \quad (3)$$

On note  $P_O$  la pression au centre du Soleil. L'expression du gradient en coordonnées sphériques est rappelée

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi. \quad (4)$$

- B5.** À partir de l'équation (3), déterminer l'expression de  $P(r)$  en fonction de  $P_O$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $r$  et  $\rho_S$ . En supposant que la pression à l'extérieur du Soleil est nulle  $P(R_S) = 0$ , déterminer l'expression de  $P_O$ .

Pour déterminer la température à l'intérieur du Soleil, celui-ci est considéré comme constitué d'un gaz parfait (hypothèse  $H_3$ ) d'hydrogène totalement ionisé, mélange équimolaire de protons  $H^+$  et d'électrons  $e^-$ .

- B6.** Justifier que la masse molaire moyenne du gaz vaut environ  $\mathcal{M} \simeq \frac{1}{2} m_p \mathcal{N}_A$  et effectuer l'application numérique. Quelle est de plus la relation dans ce modèle entre  $\mathcal{M}$  et la pression  $P$ , la température  $T$ , la constante  $R$  des gaz parfaits et la masse volumique  $\rho_S$  du Soleil ?

**Document 3 – La photosphère**

D'après Wikipédia : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Soleil>

La photosphère est une des couches externes de l'étoile, dont le rayon externe

correspond à la définition du rayon de l'étoile, et qui produit entre autres la lumière visible.

La lumière qui y est produite contient toutes les informations sur la température du rayonnement émis, la gravité de surface et la composition chimique de l'étoile. Pour le Soleil, la photosphère a une profondeur d'environ 400 kilomètres.

- B7.** Déduire des questions précédentes l'expression de la température dans le Soleil  $T(r)$  en fonction de  $\rho_S$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $r$ ,  $R_S$ ,  $R$  et  $\mathcal{M}$ . Quelle est la partie la plus chaude de la photosphère ? En considérant que la lumière est produite sur la couche interne de la photosphère, calculer la température à laquelle est émis le rayonnement électromagnétique du Soleil. Comparer à la valeur obtenue dans la partie A.
- B8.** D'après votre culture scientifique, discuter de la validité des hypothèses  $H_1$  et  $H_2$ . Peut-on considérer un gaz de particules chargées comme un gaz parfait ? Discuter de la validité de l'hypothèse  $H_3$ . Que dire du modèle proposé ?

## C/ Étude d'une centrale photovoltaïque

On s'intéresse à une centrale de taille comparable à celle de Martillac, près de Bordeaux, permettant d'alimenter en électricité une trentaine d'habitations. Elle est constituée 126 modules de 4 panneaux. Chaque panneau est formé de  $9 \times 6$  cellules photovoltaïques, et chaque cellule possède une taille  $16 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$ . Cette centrale produit environ  $100 \text{ kW}$  dans de bonnes conditions d'éclairement des modules. La caractéristique d'une cellule est donnée sur la figure suivante (FIGURE 2).

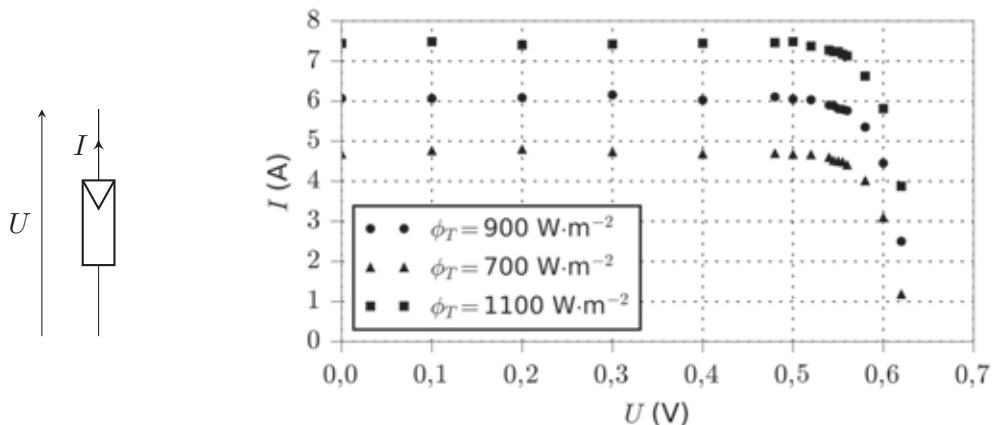


FIGURE 2 – Caractéristique d'une cellule photovoltaïque en convention générateur pour plusieurs valeurs différentes de l'éclairement.

- C1.** Décrire précisément mais succinctement un protocole expérimental permettant de mesurer la caractéristique d'une cellule photovoltaïque telle que présentée sur la FIGURE 2.

On considère une cellule photovoltaïque recevant un flux  $\phi'_T \simeq 900 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Les points expérimentaux correspondants sont enregistrés dans un environnement Python dans deux

objets de type liste : *Liste\_U* contenant les valeurs des tensions mesurées et *Liste\_I* les valeurs des intensités correspondantes.

- C2.** Écrire une fonction **MaxPuissance** en langage Python prenant en argument *Liste\_U* et *Liste\_I* et renvoyant la tension  $U_m$  et l'intensité  $I_m$  correspondant au maximum de la puissance fournie par la cellule photovoltaïque.

Les valeurs trouvées sont  $I_m = 5,8 \text{ A}$  et  $U_m = 0,55 \text{ V}$ . Les  $9 \times 6$  cellules photovoltaïques d'un panneau sont en série tandis que les 4 panneaux d'un module sont en parallèle.

- C3.** Déterminer la tension  $E$  aux bornes d'un module, l'intensité  $I_{mod}$  traversant ce module et la puissance  $\mathcal{P}_{mod}$  délivrée par ce module. Retrouver l'ordre de grandeur de  $100 \text{ kW}$  délivré par la centrale solaire de Martillac.
- C4.** D'après vous, en vous appuyant sur le document 4 et en argumentant, quelle est la composition des cellules utilisées dans la centrale de Martillac ?
- C5.** Quel est l'ordre de grandeur de la puissance délivrée par la centrale lorsque, par temps partiellement nuageux, l'éclairement baisse à  $700 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  ? Commenter sur l'usage des centrales photovoltaïques.

#### Document 4 – Les différentes technologies de cellules photovoltaïques

*D'après EDF*

Différentes technologies entrent aujourd'hui dans la composition des installations photovoltaïques :

- Le silicium cristallin
- Le silicium amorphe
- Le cuivre/indium/sélénium
- Le cuivre/indium/gallium/sélénium

Les panneaux solaires à base de silicium cristallin sont les plus anciens. Ils se décomposent eux-mêmes en deux variantes : le monocristallin et le polycristallin. Ces deux variantes sont aujourd'hui très proches aussi bien en termes de rendement qu'en termes de coût. Le rendement d'un panneau photovoltaïque correspond à la quantité d'énergie solaire transformée par le panneau en électricité consommable, par rapport à l'énergie captée. Le rendement moyen d'un panneau cristallin du marché est de 14,5%.

La souplesse mécanique du silicium amorphe lui permet d'être essentiellement utilisé dans des complexes de type « membrane solaire » ou « tôle solaire ». Le rendement moyen des panneaux solaires à base de silicium amorphe est de 6 à 8%.

Aujourd'hui, des technologies émergent à base de cuivre / indium / sélénium et de cuivre / indium / gallium / sélénium. Elles offrent de grandes perspectives en termes de coût et de rendement.

**DEUXIÈME PARTIE**

**Transport de l'énergie électrique de la centrale au consommateur**

*L'énergie produite par une centrale photovoltaïque est dans certains cas directement injectée dans le réseau électrique basse tension pour pouvoir être consommée localement.*

*Dans toute cette partie, on s'intéresse au transport électrique monophasé de cette énergie, c'est-à-dire utilisant deux câbles électriques, principalement employé pour alimenter les zones peu denses en habitations.*

*Pour des raisons historiques et techniques, le réseau électrique basse tension fonctionne avec des tensions alternatives. En France, la fréquence utilisée vaut  $f_r = 50 \text{ Hz}$  tandis que la tension efficace sur le réseau considéré est  $U_r = 230 \text{ V}$ .*

*La transformation de la tension continue délivrée par la centrale photovoltaïque en signal électrique transportable sur le réseau est étudiée dans la partie D. Dans la partie E on examine le dimensionnement des câbles utilisés pour le transport de l'énergie sur le réseau. Enfin, la partie F s'intéresse au choix des caractéristiques électriques de la ligne monophasée pour l'adaptation au transport de l'énergie jusqu'aux installations domestiques. Ces trois parties sont indépendantes.*

**D/ Transformation en courant alternatif grâce à un onduleur**

*Pour pouvoir consommer l'énergie produite par la centrale, il faut transformer la tension continue  $E \simeq 30 \text{ V}$  supposée constante et délivrée par un module de 4 panneaux (voir la partie C) en tension alternative de fréquence  $f_r$  et de tension efficace  $U_r$ . Le principe de cette transformation se décompose en trois étapes, illustrées sur la FIGURE 3 :*

- tout d'abord, l'onduleur de tension autonome positionné après les panneaux photovoltaïques de la centrale transforme le signal continu en signal alternatif;
- ensuite, une opération de filtrage est nécessaire pour rendre la tension de sortie de l'onduleur la plus proche possible d'un signal sinusoïdal à  $50 \text{ Hz}$ ;
- la dernière étape, qui ne sera pas étudiée ici, consiste à amplifier cette tension pour que sa tension efficace soit de  $230 \text{ V}$ .

*Pour réaliser la première étape, on étudie un onduleur de tension autonome à commande symétrique dans un premier temps puis à commande décalée dans un second temps.*

*Pour un onduleur autonome à commande symétrique, les interrupteurs représentés sur la FIGURE 3 s'ouvrent et se ferment en fonction du temps, noté  $t$ , selon la séquence suivante, avec  $T = 1/f_r$  et  $n$  un entier relatif :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } nT \leq t \leq nT + \frac{T}{2} & \text{alors } K_1 \text{ et } K_3 : \text{fermés} ; \quad K_2 \text{ et } K_4 : \text{ouverts}, \\ \text{si } nT + \frac{T}{2} \leq t \leq (n+1)T & \text{alors } K_1 \text{ et } K_3 : \text{ouverts} ; \quad K_2 \text{ et } K_4 : \text{fermés}. \end{array} \right. \quad (5)$$

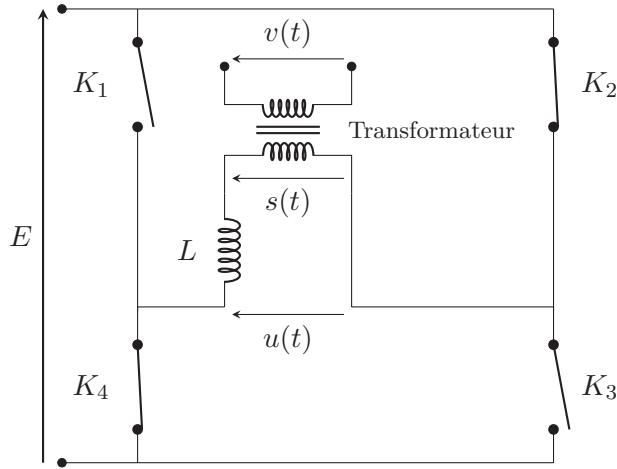


FIGURE 3 – Représentation schématique du circuit électrique, de la centrale au réseau électrique.

- D1.** Représenter le schéma électrique équivalent de l'onduleur lorsque  $nT < t \leq nT + T/2$  et lorsque  $nT + T/2 < t \leq (n+1)T$ . Représenter alors l'allure de la tension  $u(t)$  en sortie de l'onduleur. Quelle est la tension efficace  $U_{eff}$  de  $u(t)$  ?

Cette tension n'étant pas sinusoïdale, un filtrage est nécessaire. On modélise de manière très simple le transformateur par une résistance  $R$  et une inductance négligeable devant  $L$ . Le circuit équivalent est représenté sur la FIGURE 4.

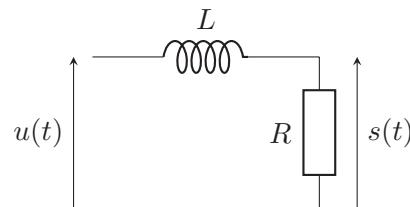


FIGURE 4 – Schéma du filtre équivalent.

Pour étudier l'influence de ce filtre sur chacun des harmoniques de la tension  $u(t)$ , on étudie le comportement de ce filtre lorsque la tension d'entrée  $u(t)$  est un signal sinusoïdal de fréquence  $f$ .

- D2.** Rappeler l'expression de l'impédance  $\underline{Z}_L$  d'une inductance  $L$  ainsi que celle,  $\underline{Z}_R$ , d'une résistance  $R$ . En déduire que l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}(f) = \frac{\underline{s}}{\underline{u}}$  est

$$\underline{H}(f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_0}}, \quad (6)$$

où l'expression de  $f_0$  est à déterminer en fonction de  $R$  et  $L$ .

- D3.** Quelle est la nature de ce filtre ? Est-il adapté pour filtrer  $u(t)$  en un signal sinusoïdal à 50 Hz ? Déterminer le gain  $G = |\underline{H}(f)|$  du filtre. Exprimer la fréquence de coupure à  $-3$  dB de ce filtre, notée  $f_c$ , en fonction de  $f_0$ .

On choisit pour la suite la valeur de  $L$  telle que  $f_r = f_0$ . La tension  $u(t)$  peut se décomposer en une série de Fourier selon :

$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} U_{2p+1} \sin [2(2p+1)\pi f_r t] , \quad (7)$$

avec les amplitudes des harmoniques de rang  $n$  valant  $U_n = \frac{1}{n}$ .

- D4.** En sortie du filtre, quels sont les rangs des harmoniques  $S_n$  présents dans le signal  $s(t)$ ? L'amplitude  $S_3$  de l'harmonique de rang trois est-elle négligeable devant celle du fondamental? Même question avec l'harmonique de rang cinq d'amplitude  $S_5$ . Commenter.

Tout en conservant exactement le même filtre avec les mêmes composants, il est possible d'améliorer le filtrage en jouant sur la séquence d'ouverture et de fermeture des interrupteurs. Dans ce cas, l'onduleur est dit à « commande décalée ».

L'ouverture et la fermeture des interrupteurs est commandée à partir de la comparaison du signal du réseau pré-existant  $u_r(t) = \sqrt{2}U_r \sin(2\pi f_r t)$  et d'un signal de commande  $p(t)$  de forme triangulaire, d'amplitude  $\alpha\sqrt{2}U_r$  avec  $\alpha = 1,10$  et de fréquence  $f_p = 400$  Hz représenté sur la FIGURE 5. Le fonctionnement est donné par la séquence suivante :

$$\begin{cases} \text{si } u_r(t) > p(t) & \text{alors } K_1 : \text{fermé et } K_4 : \text{ouvert} \\ & \text{sinon } K_1 : \text{ouvert et } K_4 : \text{fermé,} \\ \text{si } -u_r(t) > p(t) & \text{alors } K_2 : \text{fermé et } K_3 : \text{ouvert} \\ & \text{sinon } K_2 : \text{ouvert et } K_3 : \text{fermé.} \end{cases} \quad (8)$$

Il y a donc toujours deux interrupteurs ouverts et deux interrupteurs fermés.

On se propose d'étudier le principe de cet onduleur numériquement en langage python. On commence par définir les deux fonctions  $u_r(t)$  et  $p(t)$  servant au pilotage des interrupteurs grâce au programme suivant.

```

1  from math import sqrt, sin #racine carrée et sinus
2  fr = 50. #fréquence du réseau en Hertz
3  T = 1./fr
4  A = sqrt(2)*230 #amplitude en Volts
5
6  def Ur(t):
7      return A*sin(2*pi*fr*t)
8
9  fp = 400. #fréquence du signal de commande
10 Tp = 1./fp
11 alpha = 1.10
12 Ap = A*alpha
13
14 def p(t):
15     if t<0:
16         return p(-t)
17     n = t%Tp
18     if 0<=n<=Tp/2:
19         return Ap*(4/Tp*n-1)
20     else:
21         return Ap*(-4/Tp*(n-Tp/2)+1)

```

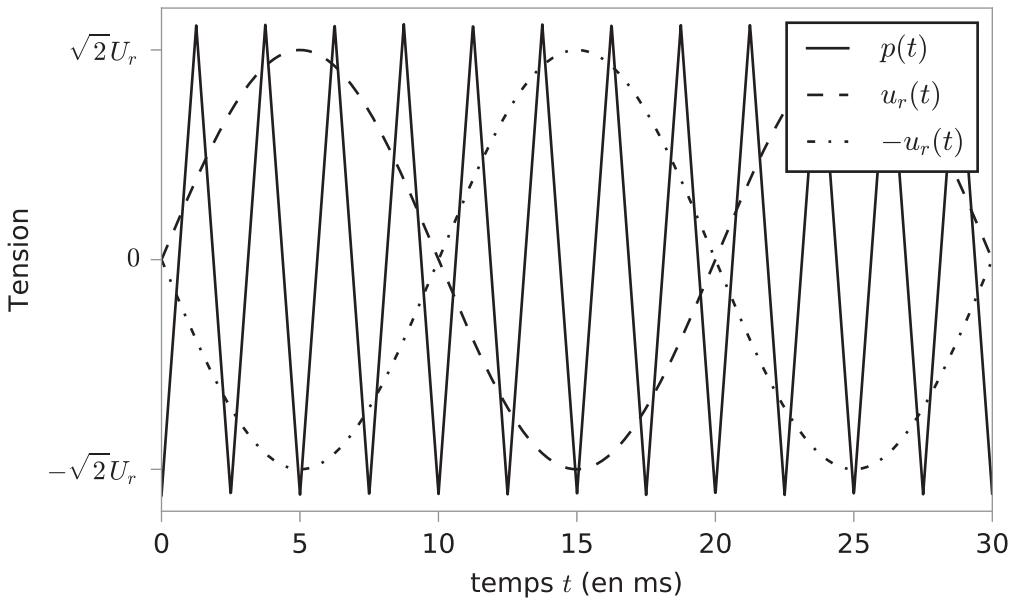


FIGURE 5 – Représentation des fonctions de commande  $p$ ,  $u_r$  et  $-u_r$  en fonction du temps pour l'onduleur à commande décalée. Ce graphique est donné à titre indicatif afin d'aider le candidat si besoin.

- D5.** Commenter et justifier la façon dont a été définie la fonction `p` dans le code ci-dessus.
- D6.** Dans cette nouvelle séquence, on montre que si  $K_1$  et  $K_3$  sont fermés alors  $u(t) = +E$ , si  $K_2$  et  $K_4$  sont fermés alors  $u(t) = -E$  et  $u(t) = 0$  sinon. On associe alors à chaque interrupteur un entier valant 0 si l'interrupteur est ouvert et 1 s'il est fermé. Élaborer une fonction Python nommée `tension` prenant en arguments les quatre valeurs des interrupteurs  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  et  $K_4$  et renvoyant la tension  $u$  en sortie de l'onduleur.
- D7.** Élaborer une fonction Python nommée `onduleur` prenant comme argument un flottant représentant le temps  $t$ , temps auquel sont évaluées les conditions d'ouverture de la séquence donnée précédemment à l'équation (8), et renvoyant la valeur de la tension en sortie de l'onduleur à cet instant  $t$ .

*Pour pouvoir tracer l'allure de la tension  $u(t)$ , on souhaite définir une liste de  $(N + 1)$  valeurs de temps  $t_k$  régulièrement espacés compris entre 0 et  $T_N$  tous les deux inclus. Pour la suite, on choisit  $N = 40\,000$  et  $T_N = 20T$ , où  $T$  est la période du signal du réseau.*

- D8.** Donner les instructions en langage Python pour construire les deux listes à enregistrer dans les variables respectives `Liste_t` et `Liste_u` et contenant respectivement les valeurs des temps  $t_k$  et des tensions  $u(t_k)$ .
- D9.** Écrire alors en langage Python les commandes permettant de tracer le graphique de  $u(t)$  et de se représenter le fonctionnement de l'onduleur comme dans l'exemple page suivante de la FIGURE 6. On ne se souciera ni des légendes ni des axes.
- D10.** Quelle est la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  de ce signal ? Justifier qualitativement pourquoi un si grand nombre de points de calcul du signal a été choisi ?

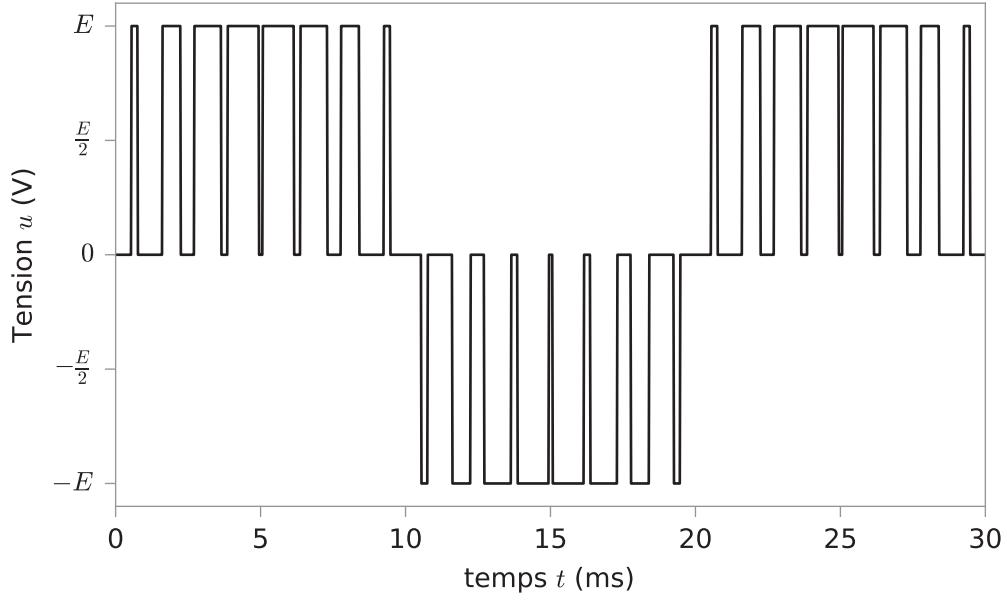


FIGURE 6 – Représentation de  $u(t)$  sur une période et demi en sortie de l'onduleur à commande décalée étudié.

Grâce au module `fftpack` de la bibliothèque `scipy`, on réalise la transformée de Fourier de la tension  $u(t)$ . On dispose alors de deux listes de  $N$  éléments contenant les fréquences et les amplitudes  $A_i$  correspondantes. Ces deux listes, permettent de tracer le spectre de  $u(t)$  représenté sur la FIGURE 7.

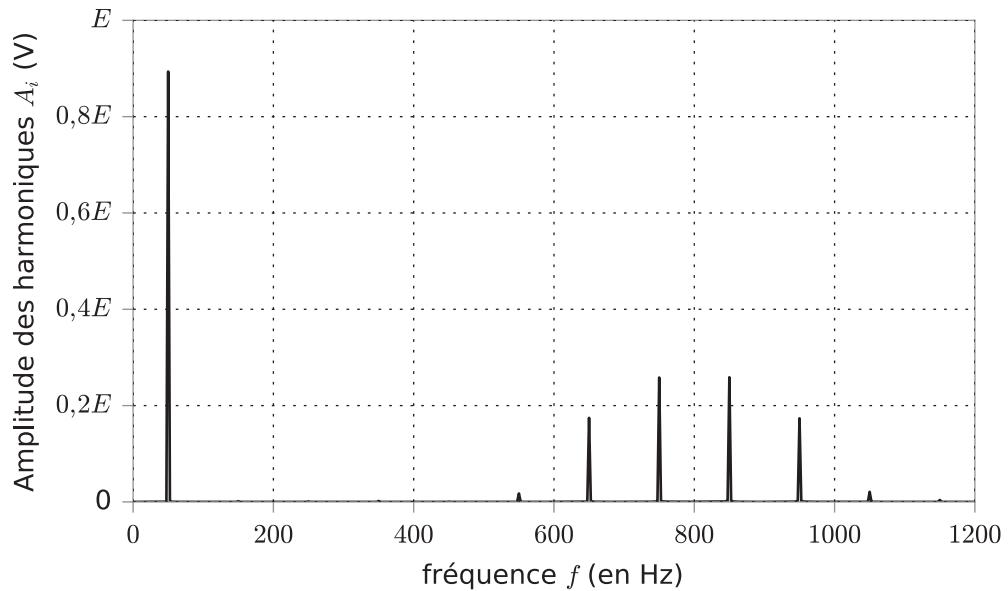


FIGURE 7 – Spectre d'amplitude de la tension  $u$  en fonction des fréquences.

**D11.** Écrire la ligne de code Python permettant d'importer le module `fftpack` de la bibliothèque `scipy`.

**D12.** À partir du spectre présenté sur la FIGURE 7, vérifier si la fréquence du fondamental, notée  $f_1$ , est compatible avec celle déduite du signal temporel de la FIGURE 6, et commenter la présence des autres harmoniques.

On trouve  $\frac{A_1}{E} = 0,89$ ,  $\frac{A_{11}}{E} = 0,017$  et  $\frac{A_{13}}{E} = 0,17$ .

**D13.** Calculer les amplitudes relatives des harmoniques  $S_1/E$ ,  $S_{11}/E$  et  $S_{13}/E$  après le filtre. Quelle est l'allure du signal de sortie  $s(t)$  en sortie de filtre lorsque l'onduleur est à commande décalée ? Quel avantage y-aurait-il à utiliser un onduleur à commande décalée dans ce montage ?

## E/ Dimensionnement des câbles

On s'intéresse dans cette partie à la dimension des câbles employés pour transporter l'énergie électrique de la centrale au consommateur. On cherche à justifier le rayon  $r_c$  des câbles utilisés en début du réseau basse tension.

Pour cela, on adopte le modèle de Drude : un électron libre de charge  $-e$  est soumis à la force qu'exerce un champ électromagnétique et à une force de frottement visqueux, modélisant les collisions, de la forme  $\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$  avec  $m_e$  la masse d'un électron,  $\tau$  un temps de relaxation et  $\vec{v}$  la vitesse des électrons.

Un fil infini d'axe  $Oz$  et de rayon  $r_c$  est parcouru par un vecteur densité de courant  $\vec{j}_c$ . Le milieu, supposé électriquement neutre, contient  $n_0$  électrons mobiles par unité de volume. Il est suffisamment dilué pour pouvoir négliger les interactions entre les différentes charges du milieu.

On utilise les coordonnées cylindrique de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . On considère un champ électromagnétique monochromatique de la forme  $\vec{E}(r, t) = \underline{E}_0(r) \exp(j\omega t) \vec{u}_z$  pour le champ électrique et  $\vec{B}(r, t) = \underline{B}_0(r) \exp(j\omega t) \vec{u}_\theta$  pour le champ magnétique.

Le mouvement d'un électron du milieu conducteur est non relativiste et il est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

**E1.** Dans le modèle présenté ci-dessus, appliquer la deuxième loi de Newton à un électron du milieu et donner l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse  $\vec{v}$ . Faut-il prendre en compte le poids de l'électron ? Justifier.

**E2.** On note  $\mu_0$  la perméabilité du vide et  $\epsilon_0$  la permittivité du vide. Écrire pour le milieu considéré les quatre équations de Maxwell.

**E3.** Justifier que la force magnétique subie par un électron est négligeable devant la force électrique. Simplifier alors l'équation du mouvement d'un électron.

On se place en régime permanent sinusoïdal et on note  $\vec{v}$  la vitesse de l'électron dans ce régime.

**E4.** Exprimer  $\vec{v}$  en fonction de  $e$ ,  $\underline{E}_0$ ,  $\tau$ ,  $m_e$  et  $\omega$ . En déduire l'expression du vecteur densité de courant  $\vec{j}_c$  en fonction des mêmes variables et de  $n_0$ .

- E5.** Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale en fonction de  $\vec{j}_c$ ,  $\vec{E}$  et de la conductivité électrique  $\gamma$ . En déduire que la conductivité complexe  $\underline{\gamma}$  en régime permanent sinusoïdal s'exprime

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\tau\omega}, \quad (9)$$

et donner l'expression de  $\gamma_0$  en fonction de  $n_0$ ,  $e$ ,  $\tau$  et  $m_e$ .

Un milieu conducteur tel que le câble étudié est caractérisé par un temps de relaxation de l'ordre de  $\tau \simeq 10^{-14}$  s et une densité de porteurs de charge de l'ordre de  $n_0 \simeq 10^{29}$  m<sup>-3</sup>. On rappelle que la fréquence du signal considéré est  $f_r = 50$  Hz.

- E6.** Calculer  $\gamma_0$ . Par des calculs d'ordre de grandeurs, simplifier l'expression de la conductivité  $\underline{\gamma}$  ainsi que l'équation de Maxwell-Ampère.

On rappelle que pour un champ vectoriel  $\vec{f}$ , on a la relation  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{f}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{f}) - \Delta\vec{f}$  avec  $\Delta$  le laplacien vectoriel.

- E7.** Déduire des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm locale que le vecteur densité de courant  $\vec{j}_c(r)$  vérifie

$$\Delta\vec{j}_c = \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 \vec{j}_c. \quad (10)$$

Déterminer l'expression de  $\delta$  et le calculer numériquement dans le cas étudié. Quel nom donne-t-on couramment à  $\delta$  ?

La résolution de cette équation n'est pas demandée. La solution de l'équation précédente en coordonnées cylindriques conduit à un vecteur de la forme  $\vec{j}_c(r) = \underline{j}_c(r) \vec{u}_z$  avec une certaine expression pour  $\underline{j}_c(r)$ .

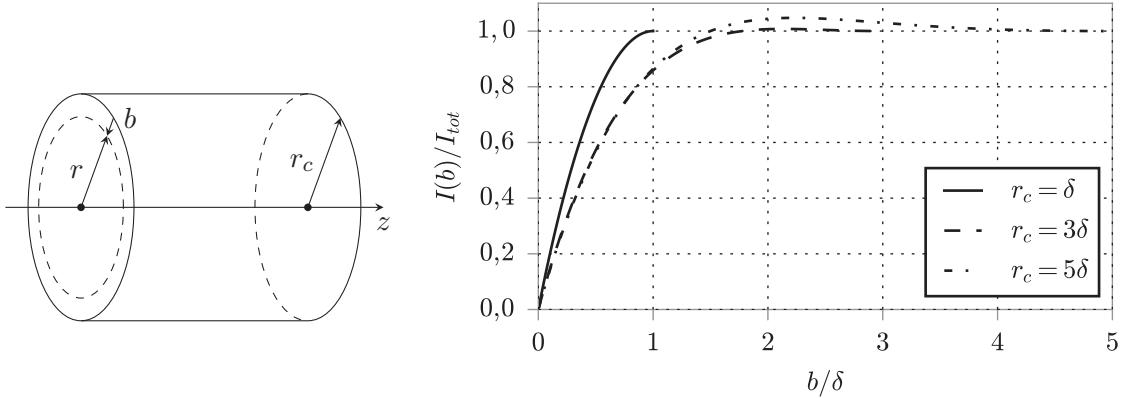


FIGURE 8 – À gauche : Représentation de l'épaisseur externe  $b$ . À droite : Représentation de  $I(b) / I_{tot}$  pour les trois valeurs  $r_c = \delta$ ,  $r_c = 3\delta$  et  $r_c = 5\delta$ .

On représente alors sur la FIGURE 8 l'intensité normalisée  $\frac{I(b)}{I_{tot}}$  avec  $I(b) = \left| \int_{r_c-b}^{r_c} 2\pi \underline{j}_c(r) r dr \right|$

l'intensité circulant dans l'épaisseur  $b$  la plus externe du conducteur et  $I_{tot} = \left| \int_0^{r_c} 2\pi j_c(r) r dr \right|$  l'intensité totale.

- E8.** En étudiant les courbes représentatives de  $I(b) / I_{tot}$  pour différents rayons, quelle est la zone du câble la plus sollicitée pour transporter le courant ? Est-il utile de fabriquer des câbles dont le rayon vaut plusieurs fois  $\delta$  ? Justifier.
- E9.** Au début du réseau basse tension, la section des câbles est  $s = 240 \text{ mm}^2$ . Commenter.
- E10.** En pratique, pour faire circuler des courants intenses, on utilise plusieurs fils de faible rayon isolés les uns des autres, plutôt qu'un seul fil de gros rayon. Justifier ce choix.
- E11.** Proposer une explication permettant à  $I(b) / I_{tot}$  d'être supérieur à 1 pour certaines valeurs de  $b$ , comme cela peut s'observer sur la FIGURE 8 dans le cas où  $r_c = 5\delta$ .

*On s'intéresse maintenant à une méthode numérique permettant de calculer les intégrales définissant  $I(b)$  et  $I_{tot}$ .*

- E12.** Expliquer en quelques phrases et avec un schéma le principe d'intégration numérique par la méthode des rectangles.
- E13.** Élaborer une fonction Python nommée `Rectangles` prenant comme arguments une fonction  $f$ , deux flottants  $a$  et  $b$  et un nombre de points de calcul  $n$  et renvoyant la valeur approchée par la méthode des rectangles de  $\int_a^b f(x) dx$  calculée sur  $n$  points.
- E14.** Quelle est la complexité de calcul de cet algorithme ? On donnera la réponse sous la forme  $\mathcal{O}(k)$  où  $k$  est une grandeur à déterminer en fonction de  $n$ .

*On souhaite comparer la précision de la méthode des rectangles avec deux autres méthodes, celle des trapèzes et celle de Simpson. On note  $R_n(f)$  la valeur approchée de  $\int_0^{\pi/2} f(t) dt$  par une méthode numérique (rectangles, trapèzes ou Simpson) utilisant  $n$  points de calcul. Cette comparaison est réalisée sur un exemple dont la solution exacte est simple :  $\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = 1$ .*

*On calcule l'erreur  $|\epsilon| = \left| \frac{\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx - R_n(\sin)}{\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx} \right| = \left| \frac{1 - R_n(\sin)}{1} \right|$ . La FIGURE 9 donne l'erreur  $|\epsilon|$  en fonction du nombre de points de calcul  $n$  pour les trois méthodes considérées en échelle log-log.*

- E15.** A partir de la FIGURE 9, estimer l'évolution de l'erreur en fonction de  $n$  pour des valeurs de  $n$  pas trop élevées. On donnera la réponse sous la forme  $|\epsilon| = \mathcal{O}(k)$  où  $k$  est une grandeur à déterminer en fonction de  $n$ . Comparer les trois méthodes d'intégration numérique.
- E16.** Passer une certaine valeur de  $n$ , on remarque que l'erreur augmente légèrement avec  $n$ . Ceci est visible sur la FIGURE 9 pour la méthode des trapèzes ou de Simpson. Proposer une explication à cela.

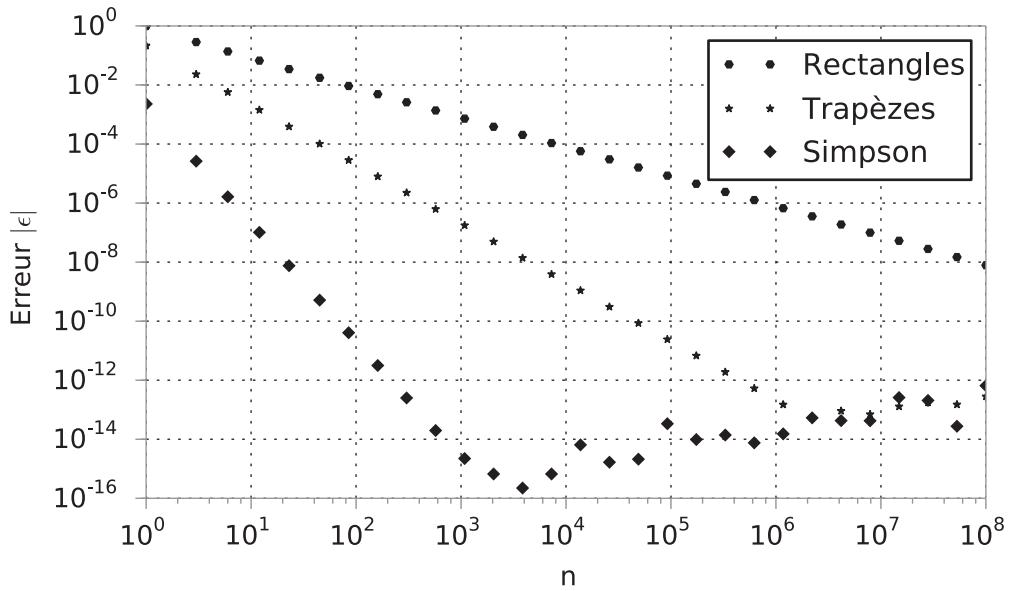


FIGURE 9 – Erreur des différentes méthodes en fonction du nombre de points de calcul  $n$  en échelle log-log

## F/ Propagation de la tension le long d'une ligne électrique

On se propose ici d'étudier la propagation des signaux électriques dans une ligne monophasé, assimilée à deux câbles (en réalité il y en a plus, voir partie précédente) de longueur  $L_c$ .

Dans un premier temps, un tronçon de longueur  $dx$  de cette ligne monophasée, que l'on considère très petite devant toutes les longueurs caractéristiques du phénomène, peut-être modélisé par une inductance  $\ell dx$  et une capacité  $\alpha dx$  ( $\ell$  et  $\alpha$  étant constantes) selon le schéma de la FIGURE 10.

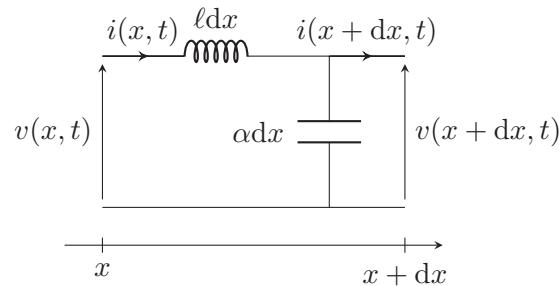


FIGURE 10 – Schématisation de la ligne électrique monophasée entre  $x$  et  $x + dx$  à l'instant  $t$ .

- F1.** L'ordre de grandeur de  $L_c$  est de 50 km. L'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire (ARQS) est-elle valable en tout point du câble ? Justifier. On rappelle que la fréquence du signal est  $f_r = 50$  Hz.

- F2.** Montrer que l'application des lois de l'électrocinétique dans l'ARQS permet d'établir les deux équations suivantes

$$\begin{cases} v(x, t) = \ell dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) + v(x + dx, t) , \\ i(x, t) = \alpha dx \frac{\partial v}{\partial t}(x + dx, t) + i(x + dx, t) . \end{cases} \quad (11)$$

- F3.** En déduire que  $v(x, t)$  vérifie une équation de D'Alembert et exprimer la célérité  $c$  des ondes associées en fonction de  $\ell$  et  $\alpha$ .

*On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques (OPPH) de pulsation  $\omega$ .*

- F4.** Déterminer la relation de dispersion des ondes dans ce milieu entre la pulsation et le nombre d'onde noté  $k$ . Donner la définition d'un milieu dispersif et d'un milieu absorbant. Le milieu est-il dispersif ? Est-il absorbant ? Les réponses devront être succinctement justifiées.

*On cherche une solution sous la forme de la somme d'une OPPH incidente notée  $\underline{v}_+(x, t)$  se propageant vers les  $x$  positifs et d'une onde réfléchie  $\underline{v}_-(x, t)$  se propageant vers les  $x$  négatifs. On note respectivement  $\underline{V}_+$  et  $\underline{V}_-$  les amplitudes complexes de ces ondes. Chaque onde de tension est de plus associée à un courant  $\underline{i}_+(x, t)$  et  $\underline{i}_-(x, t)$ , d'amplitudes  $\underline{I}_+$  et  $\underline{I}_-$ . On définit enfin l'impédance  $\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}}$  du milieu, qui dépend du type d'onde qui s'y propage.*

- F5.** Donner la forme des OPPH incidentes et réfléchies en tension. En utilisant les relations de l'équation (11), exprimer l'impédance du milieu pour les ondes incidentes, notée  $\underline{Z}_+$ , et pour les ondes réfléchies  $\underline{Z}_-$ , en fonction de  $\ell$  et  $\alpha$ . Quelle est l'unité des impédances  $\underline{Z}_+$  et  $\underline{Z}_-$  ?

*La tension d'entrée du réseau basse tension, en  $x = 0$ , est  $v(0, t) = \sqrt{2}U_r \cos(\omega t)$  où  $U_r = 230$  V. Le circuit est fermé en  $x = L_c$  sur une habitation modélisée par une simple résistance  $R'$ .*

- F6.** Écrire, sans les résoudre, les deux équations correspondantes aux conditions de bord et permettant d'obtenir  $\underline{V}_-$  et  $\underline{V}_+$ .
- F7.** Déterminer l'expression de  $R'$  en fonction de  $\ell$  et  $\alpha$  afin d'annuler l'onde réfléchie. Qualitativement, quel est l'avantage de cette situation d'un point de vue énergétique ?

*En réalité, il y a des pertes d'énergie dues à la nature résistive des câbles. On ajoute une résistance en série avec l'inductance  $rdx$  et une autre résistance linéique de valeur  $\frac{1}{gdx}$ , en parallèle avec la capacité (c'est-à-dire que  $gdx$  est l'admittance de cette résistance).*

- F8.** Quelles sont les deux nouvelles équations différentielles couplées et du premier ordre en  $x$  et en  $t$  vérifiées par  $v(x, t)$  et  $i(x, t)$  ?
- F9.** On considère des solutions de la forme  $\underline{v}(x, t) = \underline{V}(x) \exp(j\omega t)$  et  $\underline{i}(x, t) = \underline{I}(x) \exp(j\omega t)$ . Montrer que  $\underline{V}(x)$  est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \underline{V}}{dx^2} = \underline{Z}_s \underline{Y}_p \underline{V} , \quad (12)$$

avec  $\underline{Z}_s = j\ell\omega + r$  et  $\underline{Y}_p = j\alpha\omega + g$ .

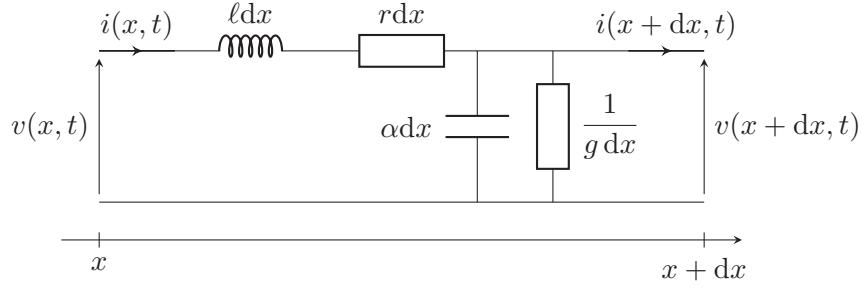


FIGURE 11 – Schématisation de la ligne électrique monophasée avec pertes entre  $x$  et  $x + dx$  à l'instant  $t$ .

On note  $\underline{k}(\omega) = k''(\omega) + jk'(\omega)$  tel que  $\underline{k}^2 = \underline{Z_s} \underline{Y_p}$ ,  $k'(\omega) > 0$  et  $k''(\omega) > 0$ . Les solutions de l'équation précédente conduisent à

$$\begin{aligned} \underline{v}(x, t) = & \underline{V}_1 \exp [ -k''(\omega)x + j(\omega t - k'(\omega)x) ] \\ & + \underline{V}_2 \exp [ k''(\omega)(x - L_c) + j(\omega t + k'(\omega)x) ] . \end{aligned} \quad (13)$$

**F10.** Sans chercher à déterminer les expressions de  $k'(\omega)$  et de  $k''(\omega)$ , préciser si ce milieu est dispersif et/ou absorbant.

En choisissant judicieusement les composants et la géométrie de la ligne, il est possible de respecter la condition  $\ell g = r\alpha$ . Dans ce cas, on trouve  $k'(\omega) = \omega\sqrt{\ell\alpha}$  et  $k''(\omega) = g\sqrt{\frac{\ell}{\alpha}}$ . On montre aussi que  $k''(\omega)$  est minimal lorsque cette condition est respectée.

**F11.** Quels sont les avantages à choisir les paramètres des câbles tels que  $\ell g = r\alpha$  ?

On admet que sous la condition  $\ell g = r\alpha$ , la résistance  $R'$  permettant d'annuler l'onde réfléchie est la même que celle obtenue dans la question F7. Les ordres de grandeurs sont  $g \simeq 2,1 \times 10^{-9} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\alpha \simeq 6,3 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $\ell \simeq 1,0 \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**F12.** Calculer numériquement  $k''$  lorsque  $\ell g = r\alpha$ . En l'absence d'onde réfléchie, calculer la variation relative de l'amplitude de la tension aux bornes de  $R'$  lorsque l'on prend en compte les pertes dans la ligne par rapport au cas sans perte. Commenter.

**Fin de l'épreuve**

## **EPREUVE DE PHYSIQUE-MODELISATION**

Durée 4 heures

### **PRESENTATION DU SUJET**

Ce sujet s'intéressait à la production et à l'acheminement de l'énergie d'une centrale photovoltaïque.

La première partie du sujet permettait d'étudier le soleil et son rayonnement, à partir d'une étude documentaire sur le modèle du corps noir. Ensuite, un modèle thermodynamique venait corroborer l'approche documentaire. Enfin, l'influence du rayonnement sur l'efficacité des panneaux photovoltaïques de la centrale était considérée.

La deuxième partie, plus conséquente, se proposait d'étudier le transport de l'énergie électrique. L'onduleur qui permet de transformer la tension continue délivrée par les panneaux photovoltaïques en tension alternative envoyée sur le réseau était étudié dans un premiers temps. Une approche numérique permettait de mieux cerner le fonctionnement de l'onduleur à commande décalée. Dans un second temps, l'étude de l'effet de peau permettait de justifier la taille des câbles utilisées dans le réseau basse tension. Dans un troisième temps, le sujet s'intéressait à la propagation de la tension de la centrale au travers des câbles à partir de l'équation des télégraphistes.

### **COMMENTAIRE GENERAL SUR L'EPREUVE**

Ce sujet a été rédigé afin d'être proche du cours et d'exercices classiques. Il se reposait sur de nombreux thèmes du programme avec, entre autres, thermodynamique, électrocinétique, mécanique des fluides, propagation des ondes, électromagnétisme, gravitation, etc.

Le sujet était volontairement un peu long afin que les candidats puissent aborder les parties sans être bloqués. Il devait permettre aux étudiants ayant travaillé sérieusement durant leurs années de PCSI/PC, de montrer l'étendue de leurs connaissances.

Les membres du jury ont eu le plaisir de lire de très bonnes copies ayant abordé presque toutes les parties du sujet. Malheureusement, comme l'année dernière, une bonne partie des copies ne sont pas satisfaisantes, notamment au niveau de la maîtrise des calculs et de la rédaction. Beaucoup de candidats n'arrivent à répondre qu'aux questions triviales. Seul un travail sérieux et régulier durant les années de classe préparatoire permet d'aborder sereinement ce type de sujet.

Les questions sur les aspects numériques ont été dans l'ensemble assez bien traitées bien que de nombreux candidats construisent des fonctions renvoyant des chaînes de caractères et non des nombres.

Les membres du jury conseillent aux futurs candidats les actions suivantes :

- Travailler régulièrement et sérieusement durant les années de PCSI/PC
- Faire un effort d'orthographe et de grammaire. L'épreuve écrite est aussi une épreuve de communication par écrit. Il faut donc écrire dans un français correct et compréhensible. Il est anormal que les membres du jury lisent trop souvent « on c'est que », « il est indiquait », etc.
- (Re)lire le programme de physique PC, pages 35-36 sur les outils transversaux. Il y a eu beaucoup trop d'erreurs d'homogénéité, d'incompatibilité avec le caractère infinitésimal ou non des grandeurs, de grandeurs vectorielles égales à des scalaires, de nombre de chiffres significatifs, d'ordre de grandeurs, etc.

- Soigner la rédaction et les explications : on n'aligne pas les équations et les calculs sans aucune justification. Pour passer d'une ligne à une autre, il faut préciser la démarche effectuée comme par exemple : « En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient... », « La projection de cette équation selon le vecteur donne ... », « On observe un pont diviseur de tension donc ... ».

Les membres du jury rappellent à ce propos qu'il est écrit sur la page de garde du sujet que la rédaction et la clarté des raisonnements sont considérées dans la notation. L'absence de rédaction a donc été sanctionnée.

- Justifier tous les résultats. L'absence de justifications entraîne l'absence de point.
- Lire attentivement le sujet (et non pas que le document réponses). Beaucoup d'erreurs sont dues à une très mauvaise lecture du sujet et des questions.
- Adapter la réponse à la question posée : quand il faut « montrer que », il faut faire un raisonnement (encore plus) solide que pour les autres questions (où le raisonnement doit aussi apparaître). Il ne faut pas essayer à tout prix de trouver le résultat de l'énoncé, c'est-à-dire qu'il ne faut pas truander. Les correcteurs ne sont pas des débutants ! Cette malhonnêteté intellectuelle a été sanctionnée.
- Être concis pour les commentaires qualitatifs. Ils peuvent se faire en une ou deux phrases à condition d'employer le bon vocabulaire et d'écrire correctement. Des candidats écrivent plus d'une dizaine de lignes dans un mauvais français alors qu'il reviendrait au même d'écrire par exemple « un gaz étant compressible... »
- Ne pas tenter de « grappiller » des points. Cela est très mal vu par les membres du jury. Faire une application numérique par-ci et par-là sans aucun commentaire ne peut pas être récompensé.
- Ne pas utiliser le symbole d'équivalence car il n'est presque jamais utilisé correctement. Il est préférable d'utiliser des mots montrant les liens logiques entre les différentes étapes du raisonnement.

Les membres du jury tenaient aussi à signaler qu'affirmer une chose ne l'a jamais rendue juste. Les résultats sont à démontrer et/ou à expliquer.

## ANALYSE PAR PARTIE

### A. Approche descriptive du rayonnement du soleil

Cette partie a été souvent traitée et cela de manière correcte.

A1. et A2. Bien traitées. Des problèmes de chiffres significatifs. Certains candidats ne savent pas exprimer l'aire d'une sphère de rayon  $R$ . Les réponses données manquent souvent de justifications.

A3. Il manque le plus souvent des explications. Beaucoup de malhonnêteté : de nombreux candidats utilisent l'expression fournie de la puissance pour en déduire le flux plutôt que de raisonner pour obtenir le flux. La conservation de l'énergie n'a été évoquée que dans moins de 1% des copies.

A4. L'absorption par l'atmosphère est mentionnée dans une bonne moitié des copies mais on trouve aussi de nombreuses réponses fantaisistes. Il faut par contre mieux s'appuyer sur les documents.

A5. Bien même si environ 10% des candidats pensent que  $E = P/\Delta t$

### B. Estimation de la température du soleil

Egalement largement traitée, il y a souvent un manque de rigueur.

B1. Cette question est mal traitée en raison d'un manque de rigueur. Il faut analyser les propriétés d'invariances et de symétries de la distribution des masses pour conclure quant à certaines propriétés satisfaites par le champ gravitationnel.

Une réponse du type : « il n'y a pas d'invariance par rotation d'angle  $\theta$  et  $\varphi$  » est irrecevable car elle n'a pas de sens. Il en est de même pour « le plan de la feuille » est un plan de symétrie.  $M$  n'appartient-il pas à ce plan ?

Des candidats pensent que le système de coordonnées à utiliser est le système de coordonnées cylindriques. D'autres voient des invariances par translation selon le vecteur  $uz$  ou  $u\theta\dots$

B2. L'analogie interaction électrostatique / interaction gravitationnelle est souvent mal menée. Toute malhonnêteté intellectuelle a été sanctionnée, notamment sur l'apparition magique du signe moins ou du facteur  $4\pi$ .

B3. Peu de candidat parle du libre parcours moyen.

Dans l'équation d'Euler, les candidats mélangeant  $\rho$ ,  $m$ ,  $\rho dt$  ou encore  $\mu$  qui ne sont jamais définis... On a dans la même équation des forces volumiques, des forces infinitésimales ou encore macroscopiques avec  $mg$  par exemple.

B4. Correct dans l'ensemble même si le jury rappelle qu'avant d'intégrer, il est bon de montrer que  $P$  ne dépend que de la variable  $r$ .

B5. Des tentatives d'arnaque innombrables pour obtenir à partir de B2 le résultat donné par l'énoncé.

B6. Très peu de candidats justifient correctement le  $\frac{1}{2}$  dans la masse molaire. La plupart réalise des démonstrations complètement fausses et montrant des lacunes de logique ou pire de la malhonnêteté pour retrouver le résultat de l'énoncé...

B7. Bien mais beaucoup d'erreur dans l'application numérique par confusion entre  $r$  et la profondeur. Les commentaires sont souvent intéressants du genre : « On trouve 6000K ce qui est 1000K de plus que les 5000K trouvés dans la première partie ».

B8. Certains candidats affichent une bonne culture scientifique dans la critique du modèle proposé. D'autres se contentent de propos fumeux. Ce qui est compris doit s'énoncer clairement.

### C. Etude d'une centrale photovoltaïque

Cette partie a été souvent traitée mais de façon très inégale par les candidats.

C1. Il fallait évidemment faire un schéma. Beaucoup de candidat n'ont pas compris ce qu'était une caractéristique et ils veulent faire varier le flux lumineux à tension constante.

C2. Attention, une majorité des candidats pense que  $\max(U \cdot I) = \max(U) \cdot \max(I)$ . Evidemment, ceci ne concerne que ceux d'entre eux qui n'écrivent pas que la puissance est  $U \cdot I^2\dots$

C3. Assez souvent bien traitée.

C4. Bien même si environ 25% des candidats pensent pouvoir répondre à cette question qu'avec des commentaires sans intérêt.

C5. Correct pour ceux qui ont abordé cette question, mais les explications et le commentaire pourraient être plus soignés.

### D. Transformation en courant alternatif grâce à un onduleur

D1. Assez mal réussie : les schémas équivalents sont corrects mais le graphe ainsi que la valeur efficace de la tension proposée sont souvent faux. Beaucoup trop souvent  $U_{eff} = u(t)/\sqrt{2}\dots$

D2. L'établissement de la fonction de transfert ne pose pas de problème. Par contre, il faut au moins préciser d'où sort cette fonction de transfert (diviseur de tension). La gestion du  $2\pi$  entre  $\omega$  et  $f$  a été très problématique. Il est étonnant de voir que  $\omega = 2\pi f$  n'est pas maîtrisé.

D3. Très rares sont ceux qui ont trouvé la fréquence de coupure à 3 dB.

D4. Non maîtrisée pour la presque totalité des candidats. Parmi les rares candidats ne confondant pas le signal d'entrée et le signal de sortie, peu d'entre eux ont considéré que le gain changeait en fonction du rang de l'harmonique.

D5. Peu de réponses satisfaisantes. Très peu de candidats ont su interpréter les lignes de code proposées. Ils se contentent simplement de traduire en français ces lignes de code. Ce n'était pas l'objectif de la question.

D6. et D7. Bien en général. La principale erreur est la confusion entre le test d'égalité et l'affectation.

D8. et D9. Les réponses ont été souvent bien plus compliquées que nécessaires. Le jury rappelle que  $a/b$  avec  $a$  et  $b$  deux entiers renvoie le quotient de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  et non pas un flottant.

D10. La fréquence d'échantillonnage est rarement juste. Le théorème de Shannon est rarement évoqué.

D12. et D13. Très peu traitées. On retrouve les mêmes problèmes qu'à la question D4s. L'analyse des données est souvent trop sommaire ce qui montre des lacunes dans ce domaine.

### **E. Dimensionnement des câbles**

Cette sous-partie a été révélatrice d'un manque de rigueur flagrant dans la comparaison des ordres de grandeur des différents termes présents dans une équation. Il ne s'agit pas de se contenter d'affirmer qu'un terme est négligeable devant un autre. Il faut l'illustrer par un calcul d'ordre de grandeur.

Trop souvent, des inégalités entre vecteurs, des divisions de vecteurs, des normes négatives ont été observées.

E1. Il faut lire les questions suivantes pour éviter de répondre n'importe quoi n'importe comment à cette question. Un calcul d'ordre de grandeur est indispensable pour pouvoir justifier que le poids est négligeable. Beaucoup d'erreurs dans l'expression de la force de Lorentz.

E2. Bien dans l'ensemble. L'erreur la plus observée est de croire qu'un milieu neutre électriquement est équivalent au vide.

E3. Trop souvent :  $\vec{E} \gg \vec{B}$

E4. Un nombre non négligeable de candidats pensent qu'en régime permanent sinusoïdal la dérivée temporelle de la vitesse est nulle... mais cela ne les choque pas d'arriver ensuite à  $\vec{v} = \vec{v}_0 \exp(j\omega t)$

E5. Bien dans l'ensemble

E6. Moyen. Des erreurs d'applications numériques. L'unité de la conductivité est rarement juste. Ecrire « uSI » pour les unités n'est pas acceptable.

E7. Bien pour ceux qui ont su trouver l'approximation de l'équation de Maxwell-Ampère. Pour les autres, beaucoup de tentatives d'escroquerie sévèrement pénalisées par les membres du jury.

E8. Peu de candidat ont compris le graphique. Un certain nombre y voient le temps en abscisse.

E9. à E11. Beaucoup de commentaires malhonnêtes et faux.

E12. La rédaction rend souvent la réponse incompréhensible. Il faut faire un effort de clarté.

E13. Bien dans l'ensemble. L'erreur la plus classique était de confondre  $f(i)$  et  $f(a + i h)$ .

E14. L'absence de justification entraîne l'absence de point.

E15. et E16. Peu compris dans l'ensemble. Des soucis dans l'interprétation de l'échelle logarithmique.

### **F. Propagation de la tension le long d'une ligne haute tension**

Il s'agissait d'un exemple classique de propagation d'une onde mais l'électrocinétique a posé problème.

F1. Classique mais rarement juste, sauf dans les meilleures copies.

F2. Il faut définir les notations utilisées. Un schéma est indispensable pour préciser les conventions d'orientation choisies.

F3. Bien dans l'ensemble. Il faut soigner la rédaction et dire clairement qu'un développement limité à l'ordre un est réalisé.

F4. Sur l'ensemble des candidats, le jury estime à une petite dizaine le nombre de candidats capables de donner une définition correcte d'un milieu dispersif et d'un milieu absorbant. Ce n'est clairement pas normal !

F5. à F12. Questions très peu abordées et encore plus rarement justes. Beaucoup de « grappillage » de point inutile.

## **ANALYSE DES RESULTATS ET CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS**

Le jury tient à préciser une nouvelle fois qu'une bonne maîtrise des notions du cours est une condition préalable à toute réussite d'une épreuve de physique. La conduite des calculs et les explications doivent être réalisées avec un minimum de rigueur. Les fautes d'homogénéité sont souvent rédhibitoires et peuvent être facilement détectées.

Après un traitement mathématique ramenant le barème à 20, la moyenne de l'épreuve s'élève à 9,52 sur 20 avec un écart-type de 3,83.

## CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

### Épreuve de Physique-Modélisation PC

Durée 4 h

**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.**

---

**L'usage de calculatrices est autorisé.**

#### Avertissement

Remarques préliminaires importantes : il est rappelé aux candidat(e)s que

- Les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques ; les résultats exprimés sans unité ne seront pas comptabilisés.
- Tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le(la) candidat(e).
- On consacre environ 3h00 à la partie physique et 1h00 à la partie informatique.
- Les questions comportant le verbe "calculer" demandent une application numérique.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

## - Microscopie « STED » -

La résolution d'un instrument d'optique est limitée par le phénomène de diffraction ; celle du microscope optique classique ne pouvant descendre en-dessous de  $0,2 \mu\text{m}$ .

Le prix Nobel de Chimie 2014 a récemment récompensé les travaux de trois scientifiques Eric Betzig, William Moerner (Etats-Unis) et Stefan Hell (Allemagne) pour avoir poussé plus loin les possibilités du microscope optique en jouant astucieusement avec la microscopie de fluorescence.

Aussi ce problème se propose d'étudier certains aspects de la microscopie optique dite « photonique ». Il se compose de quatre parties *largement indépendantes*.

### Données numériques :

Constante de Planck réduite : .....	$\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Célérité de la lumière dans le vide : .....	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Permittivité du vide : .....	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Perméabilité du vide : .....	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

### A titre informatif :

- On rappelle que :  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- On admet que la largeur  $\Delta k$  du spectre d'une fonction continue d'extension spatiale  $\Delta x$  est telle que :

$$\Delta k \cdot \Delta x \approx 2\pi$$

### Une formule d'analyse vectorielle :

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \vec{\text{grad}} \left( \text{div} \vec{A} \right) - \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

### Les équations de Maxwell :

Équation de Maxwell-Thomson : .....	$\text{div} \vec{B} = 0$
Équation de Maxwell-Faraday : .....	$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Équation de Maxwell-Gauss : .....	$\text{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}$
Équation de Maxwell-Ampère : .....	$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

**PREMIERE PARTIE**  
**ANALYSE DOCUMENTAIRE :**  
**RESOLUTION SUB-LONGUEUR**  
**D'ONDE ET MICROSCOPIE**  
**STED**

Vous consacrerez environ vingt à trente minutes à la lecture de ce document :

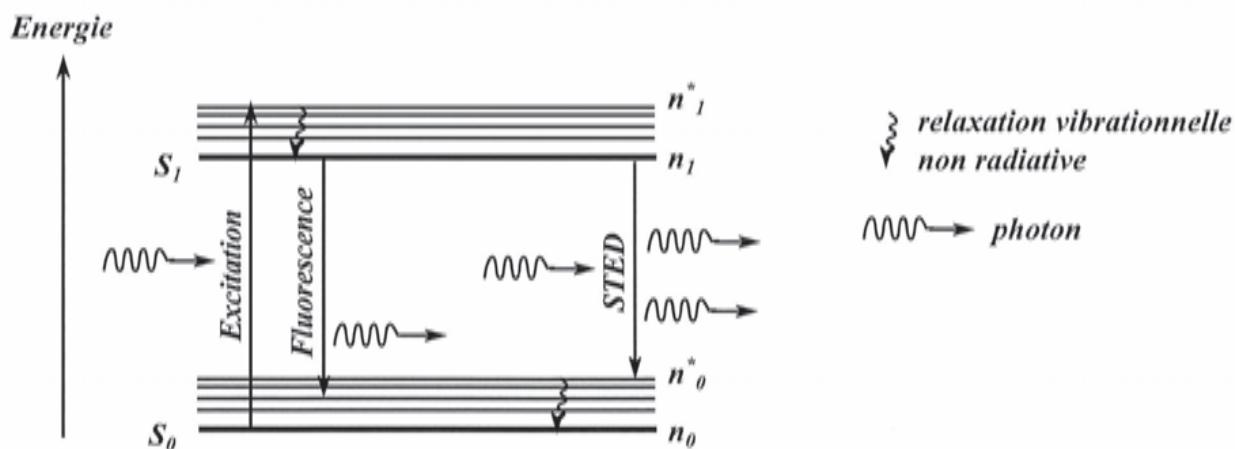
D'après un article de Pierre-François Lenne et Hervé Rigneault [1] :

*(Institut Fresnel - CNRS/Université Aix Marseille III)*

Comment obtenir une résolution en-dessous de la limite imposée par les lois de la diffraction en microscopie optique ? Des techniques optiques faisant appel en particulier aux concepts de l'optique non linéaire ont été proposées récemment pour contourner cette limite [2] (sans toutefois contredire les lois de la diffraction).

On étudie dans cet article une méthode d'augmentation du pouvoir de résolution utilisant une non-linéarité entre un signal d'excitation et le signal à détecter (la fluorescence dans ce cas).

Document 1 : Phénomène de fluorescence :



*Une molécule excitée dans un état  $S_1$  peut revenir vers un état fondamental  $S_0$  par émission spontanée de fluorescence ou par émission stimulée à l'aide d'une impulsion STED à une longueur d'onde légèrement différente.*

FIGURE 1 – Diagramme de Jablonski d'un fluorophore

Une molécule fluorescente (un fluorophore) est par exemple excitée par un faisceau laser exciteur. Dans une représentation dans l'espace des énergies de la molécule suivant le diagramme de Jablonski, le faisceau exciteur est absorbé et peuple des niveaux électroniques supérieurs  $S_1$ . Cette molécule perd rapidement une partie de l'énergie absorbée par relaxation vibrationnelle non radiative puis émet un photon d'énergie plus faible quelques nanosecondes après (fluorescence). Cette émission d'énergie peut être également stimulée par une impulsion appropriée que l'on nommera impulsion STED (Stimulated Emission Depletion).

---

**Document 2 : Principe de la microscopie STED :**

---

En 1994, il a été proposé [3] d'utiliser la saturation d'une transition entre deux états électroniques pour empêcher localement l'émission de fluorescence.

Autrement dit, cette méthode consiste à vider un état moléculaire fluorescent  $S_1$  (préalablement excité) par un faisceau STED intense, sur une zone cible en anneau (forme de « doughnut »). La partie centrale du faisceau STED étant d'intensité nulle, seule la zone centrale du volume de collection de l'échantillon visé sera apte à émettre des photons par fluorescence.

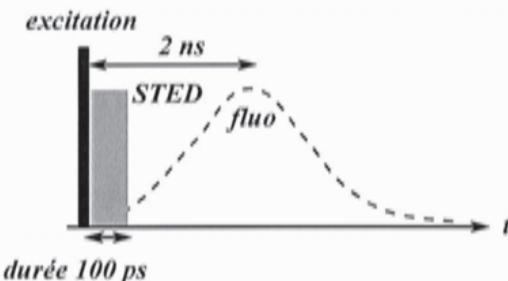


Figure 2A

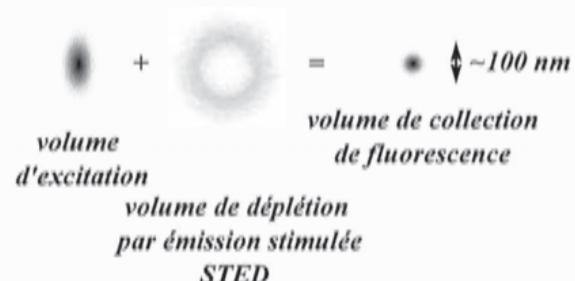


Figure 2B

FIGURE 2 – Principes de la microscopie par émission stimulée STED (d'après Hell (2003))

- **Figure 2A :** Pour que le processus stimulé l'emporte sur le processus spontané et que le vidage soit efficace (déplétion dite « saturée »), les impulsions STED doivent être intenses et arriver immédiatement après le pulse exciteur. Ce délai  $\Delta t$  entre l'impulsion exciteuse et l'impulsion STED doit être plus petit que le temps de vie de fluorescence  $\tau_{fluo}$  de la molécule dans l'état  $S_1$ .
- **Figure 2B :** Au faisceau d'excitation est superposé le faisceau de déplétion STED qui possède une zone centrale d'intensité nulle. La déplétion saturée réduit fortement le volume de collection de fluorescence.

Dans le mode de déplétion stimulée de l'émission ou STED [4], un fluorophore, excité dans un état  $S_1$  par une première impulsion focalisée (FIGURE 1) est stimulé vers son état fondamental  $S_0$  par un deuxième faisceau (faisceau STED) en forme de bouée (FIGURE 2B). Seuls les fluorophores se trouvant dans la région centrale de la bouée contribuent au signal de fluorescence détecté. Un effet non linéaire dans la déplétion conduit à l'obtention d'une zone

centrale non déplétée plus petite que la limite de diffraction. Pour obtenir une déplétion efficace, il est important qu'une molécule ayant été désexcitée par émission stimulée ne puisse pas absorber à nouveau un photon du faisceau STED l'ayant déplété. Pour cela, on ne réalise pas la déplétion vers le niveau fondamental mais vers un niveau vibrationnel situé légèrement au dessus du fondamental ; il est alors nécessaire que le taux de transition non radiatif vers l'état fondamental soit beaucoup plus grand que le taux de transition conduisant au peuplement de l'état excité fluorescent. Dans ce cas on peut montrer que la population  $n_1$  de l'état  $S_1$  est une fonction non linéaire de l'intensité de déplétion  $I_{STED}$  :

$$n_1 \sim \exp \left( -\frac{\tau \cdot \sigma \cdot I_{STED}}{\hbar \cdot \omega} \right)$$

où  $\tau$  désigne la durée du pulse STED,  $\sigma$  la section efficace de la transition<sup>1</sup> (à la résonance),  $\hbar \cdot \omega$  l'énergie du photon STED.

Cette non-linéarité permet de réduire au-dessous de la limite de diffraction la région de l'espace où les molécules sont dans l'état excité de fluorescence alors que les faisceaux excitateurs et « dépléteurs » sont limités par les lois de la diffraction classique.

### Document 3 : Mise en œuvre :

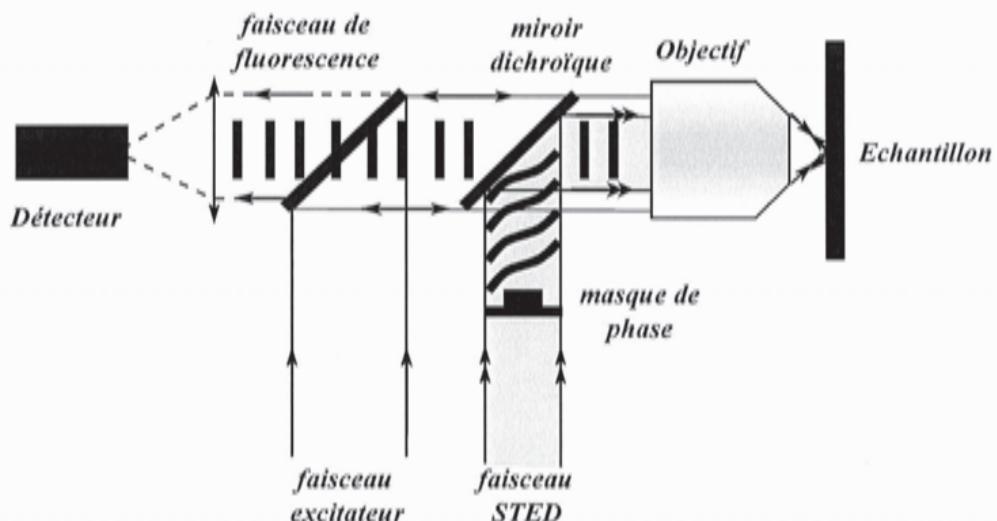


FIGURE 3 – Mise en œuvre de la technique STED

Le système laser utilise deux trains d'impulsions synchronisées (**FIGURES 2 et 3**) : un train d'impulsions visibles pour l'excitation de la fluorescence et un train d'impulsions proche IR pour le STED. La fluorescence et l'émission STED sont ainsi séparées par un filtre en sortie. Chaque impulsion visible (durée 0,2 ps) est suivie d'une impulsion STED dont la durée (plusieurs dizaines de ps) est choisie beaucoup plus longue que le temps de relaxation vibrationnelle

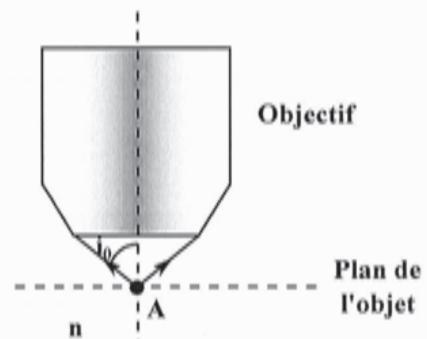
1. il s'agit d'une grandeur physique reliée à la probabilité d'interaction de la molécule avec un photon ; grandeur homogène à une aire

typique qui conduit la molécule dans l'état fondamental. Les intensités de déplétion de la fluorescence sont de 1 à 100 MW.cm<sup>-2</sup>.

Pour obtenir le faisceau STED dont l'intensité au foyer d'un objectif de microscope est forte autour du point focal mais pratiquement nulle au centre, on utilise un masque de phase en amont de l'objectif (**FIGURE 3**). Ce masque introduit une différence de chemin optique supplémentaire de  $\frac{\lambda_{STED}}{2}$  sur un disque central, inversant le signe de l'amplitude de l'onde dans cette zone par rapport au reste de la surface annulaire ; en outre si l'amplitude de l'onde provenant de la zone du disque central est égale à la moitié de l'amplitude totale de l'onde entrant dans la pupille d'entrée du microscope, le front d'onde focalisé interfère destructivement au point focal (cf. **FIGURE 2B**). On ne sélectionne ensuite que le signal de fluorescence émis par les fluorophores présents dans un volume effectif de largeur à mi-hauteur réduite à 66 nm.

La **résolution transversale** de ce type de microscopie est (d'après [5]) :

$$d' \approx \frac{\lambda_{STED}}{2 O.N. \sqrt{1 + \frac{I_{STED}}{I_s}}}$$



où :

- $\lambda_{STED}$  désigne la longueur d'onde dans le vide du faisceau STED
- $O.N$  désigne l'ouverture numérique du microscope définie par :

$$O.N = n \cdot \sin i_0$$

avec (cf. schéma ci-dessus) :

- \*  $i_0$  est le demi-angle du cône de lumière qui tombe sur l'instrument
- \*  $n$  est l'indice de réfraction du milieu dans lequel baigne l'objectif
- $I_{STED}$  est l'intensité du faisceau STED et  $I_s$  une intensité caractéristique du fluorophore définie telle que la probabilité d'émission spontanée soit réduite de moitié pour une intensité  $I_{STED}$  donnée.  $I_s$  est de l'ordre de 2 à 30 MW.cm<sup>-2</sup>.

## A / INTERACTION RAYONNEMENT-MATIERE

**A1.** Dans la technique de microscopie STED, deux faisceaux lasers sont utilisés. Quelle est la signification de l'acronyme LASER ?

Considérons un milieu constitué de  $N$  atomes à deux niveaux d'énergie  $E_1$  et  $E_2 > E_1$  traversé par une onde lumineuse monochromatique dont la fréquence  $\nu$  est donnée par :

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

Le taux d'accroissement de la population  $N_2$  des atomes dans l'état d'énergie  $E_2$  est donné par :

$$\frac{dN_2}{dt} = B.u_\nu.N_1 - A.N_2 - B.u_\nu.N_2 \quad (1)$$

- $N_1$  désigne la population des atomes dans l'état d'énergie  $E_1$ .
- $A$  et  $B$  sont les coefficients d'Einstein.
- $u_\nu$  est la densité spectrale d'énergie électromagnétique

**A2.** En quoi les propriétés des photons émis par émission spontanée et par émission stimulée diffèrent-elles notablement ?

**A3.** Interpréter physiquement les trois termes du membre de droite de l'égalité (1).

**A4.** Exprimer le rapport des populations  $\frac{N_2}{N_1}$  en régime stationnaire. Peut-il y avoir inversion de population ?

**A5.** Reprendre la question précédente si en plus le niveau excité est peuplé par un processus de pompage optique avec un taux  $\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{pompage}} = P$  que l'on considérera constant.

On revient sur le principe du microscope STED.

**A6.** Comparer la durée de relaxation vibrationnelle associée au peuplement du niveau  $S_1$  à celle de la transition  $S_0^*$  vers  $S_0$  afin d'obtenir une déplétion efficace.

**A7.** Pourquoi le détecteur ne reçoit-il pas le faisceau lumineux de longueur d'onde  $\lambda_{\text{STED}}$  alors que l'échantillon est (aussi) éclairé par ce faisceau lumineux ?

## B / UTILISATION D'UN MASQUE DE PHASE

Une tentative permettant de produire un faisceau lumineux en forme de "doughnut" est l'utilisation d'un masque de phase. L'éclairage par le faisceau STED du masque de phase nécessite d'élargir le faisceau incident que l'on considérera cylindrique sur le masque.

**B1.** Proposer une configuration à l'aide d'une lentille mince convergente (distance focale  $f'_1$ ) et d'une lentille mince divergente (distance focale  $f'_2$ ) permettant de réaliser un élargisseur de faisceau.

**B2.** En désignant par  $D$  le diamètre du faisceau lumineux incident, exprimer le diamètre  $D'$  du faisceau émergeant de l'élargisseur. On s'appuiera sur un schéma pour la démonstration.

Un masque de phase est constitué par une pastille en forme de disque, d'épaisseur  $e_1$ , d'un matériau transparent d'indice de réfraction  $n_1$  sur laquelle est présente une deuxième pastille de rayon deux fois plus faible, d'épaisseur  $e_2$ , constitué d'un matériau transparent d'indice de réfraction  $n_2$ . Une onde lumineuse monochromatique (longueur d'onde dans le vide  $\lambda_{STED}$ ) arrive en incidence normale sur ce masque de phase. Un détecteur est placé au foyer principal image  $F'$  d'une lentille mince convergente ( $\mathcal{L}$ ).

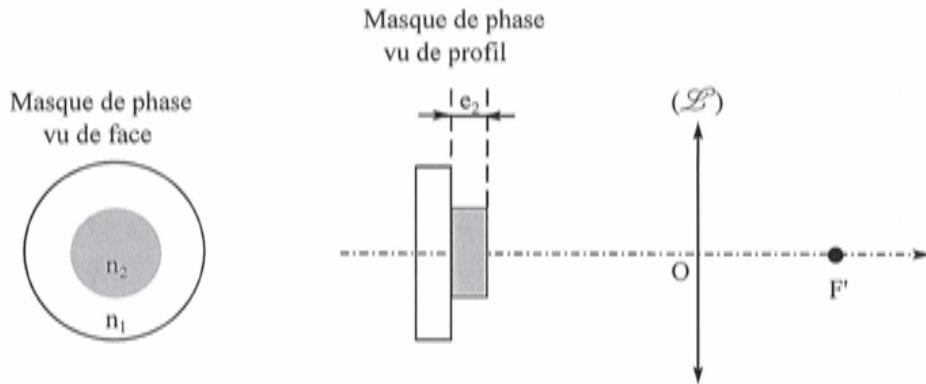


FIGURE 4 – Masque de phase

On assimilera l'indice de réfraction de l'air à celui du vide.

**B3.** Établir une condition sur l'épaisseur  $e_2$  pour observer des interférences destructives en  $F'$ .

## C / Critère de Rayleigh

Le critère de Rayleigh précise que deux points objets sont distinguables lorsque le premier minimum d'une tache d'Airy<sup>2</sup> est superposé avec le maximum central de la seconde tache d'Airy.

La résolution transversale d'un microscope classique est selon le critère de Rayleigh :

$$d' \approx 0,61 \times \frac{\lambda_0}{O.N}$$

Le facteur 0,61 provient du fait que les diaphragmes de l'objectif du microscope ne sont pas des fentes mais possèdent une symétrie de révolution dans l'axe optique des dioptres et miroirs.

Dans les applications numériques qui suivent, on prendra comme valeur de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 \approx 0,5 \mu m$ .

**C1.** Pourquoi avoir choisi comme valeur de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 \approx 0,5 \mu m$  ?

**C2.** Pour les objectifs à sec (baignant dans l'air), la meilleure ouverture numérique que l'on sache réaliser est  $O.N \approx 0,95$ . Pour les objectifs à immersion (le milieu d'entrée est de l'huile par exemple), la meilleure ouverture numérique que l'on sache réaliser est  $O.N \approx 1,4$ . Voyez-vous alors un intérêt à travailler avec un objectif à immersion ?

2. il s'agit du nom de la tache centrale obtenue en diffractant un faisceau de lumière cylindrique par une pupille circulaire

On désire comparer la résolution transversale des microscopes optiques classiques à celle du microscope STED.

**C3. Application numérique :** En prenant  $\lambda_{STED} \approx 720 \text{ nm}$ ,  $O.N = 1,4$  et  $I_{STED}/I_s \approx 100$ , estimer la résolution transversale du microscope STED.

**C4.** En exploitant l'image suivante, commenter le résultat obtenu dans la question C3.



*Image 3D des structures dendritiques reconstituée à partir d'un empilement d'images 2D prises en microscopie STED (Nägerl et al., 2008)*

En balayant l'échantillon à examiner, on déclenche la fluorescence de quelques molécules par salves de courte stimulation. Ces points lumineux sont enregistrés ; une succession d'images est obtenue qui permet ensuite de reconstituer les positions des molécules individuelles. La résolution ainsi atteinte descend « au niveau nanométrique » expliqua alors le jury Nobel lors de la cérémonie de remise du prix Nobel en Octobre 2014.

## DEUXIEME PARTIE

## DIFFRACTION EN OPTIQUE

## ET OPTIQUE DE FOURIER

### D / DIFFRACTION PAR UN RESEAU

On considère dans un premier temps une onde lumineuse plane arrivant sous incidence normale sur une mire de transmission sinusoïdale, placée dans le plan d'équation  $z = 0$ , de période spatiale  $a$  supérieure à la longueur d'onde dans le vide  $\lambda$  et de coefficient de transmission  $t(x)$  tel que :

$$t(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( 2\pi \frac{x}{a} \right) \right)$$

On adopte le modèle des ondes scalaires en optique représentées par une amplitude complexe  $\underline{s}$  telle que  $\underline{s}(x, z, t) = \underline{s}(x, z) \cdot e^{-i\omega t}$ .

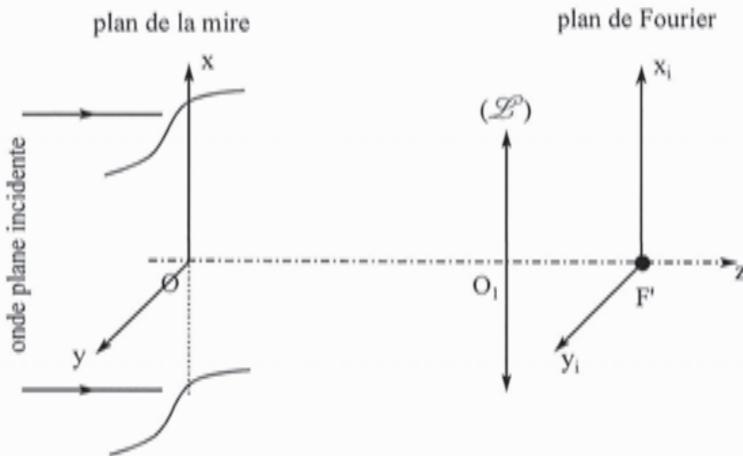


FIGURE 5 – Paramétrage du problème

Les ondes sont issues d'une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . L'amplitude complexe de l'onde lumineuse incidente a pour expression :

$$\underline{s}(x, z) = s_0 \exp(i.k.z) \text{ où } k \text{ est la norme du vecteur d'onde}$$

On examine la figure obtenue dans le plan focal image d'une lentille convergente ( $\mathcal{L}$ ) de distance focale  $f'$ .

**D1.** Établir l'expression de l'amplitude complexe de l'onde transmise après la mire. Montrer que l'onde transmise s'interprète comme la superposition de trois ondes planes monochromatiques dont on précisera les directions de propagation. Qu'observe-t-on alors sur l'écran ?

**D2.** Déterminer les abscisses  $x_i$  des points du plan focal image pour lesquels on observe une intensité non nulle.

On remplace maintenant la mire par un réseau de pas  $a$ , infiniment long suivant la direction  $\vec{y}$  et de coefficient de transmission  $t(x)$  de type créneau. On réalise la même expérience que précédemment.

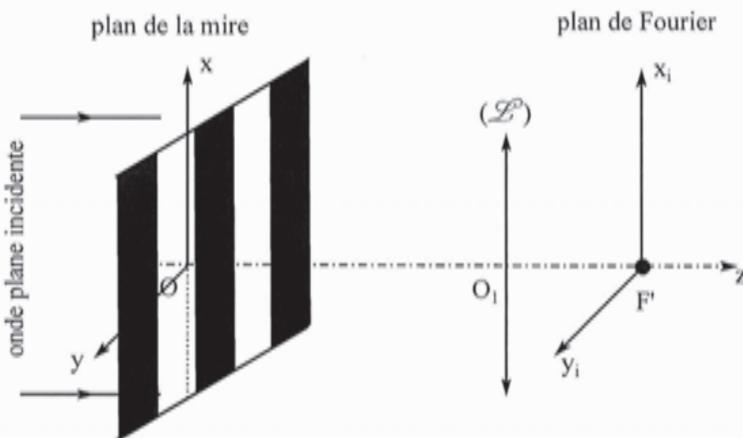


FIGURE 6 – Paramétrage du problème

- D3.** Que peut-on dire des fréquences spatiales du réseau de pas  $a$  comparées à celle de la mire sinusoïdale de même période  $a$ ? Décrire précisément ce qui est observé sur l'écran.

## E / DIFFRACTION PAR UNE FENTE INFINIMENT LONGUE

On réalise ici le montage «  $4f$  » constitué de deux lentilles minces convergentes ( $\mathcal{L}_1$ ) et ( $\mathcal{L}_2$ ), de même distance focale  $f'$ .

Un diaphragme  $\mathcal{D}$  est percé d'une fente rectangulaire dont les axes sont parallèles respectivement à ( $F'x$ ) et ( $F'y$ ), tous deux perpendiculaires à l'axe optique et ayant pour origine le foyer principal image  $F'$ . On désigne par  $b$  la largeur de la fente selon ( $F'x$ ) et on néglige l'influence de sa grande longueur selon ( $F'y$ ).

On notera dans ce paramétrage le choix des orientations relatives des axes de coordonnées dans les plans ( $A_0x_0y_0$ ) et ( $A_ix_iy_i$ ).

On place en  $A_0$  une source lumineuse ponctuelle monochromatique (de longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ ) :

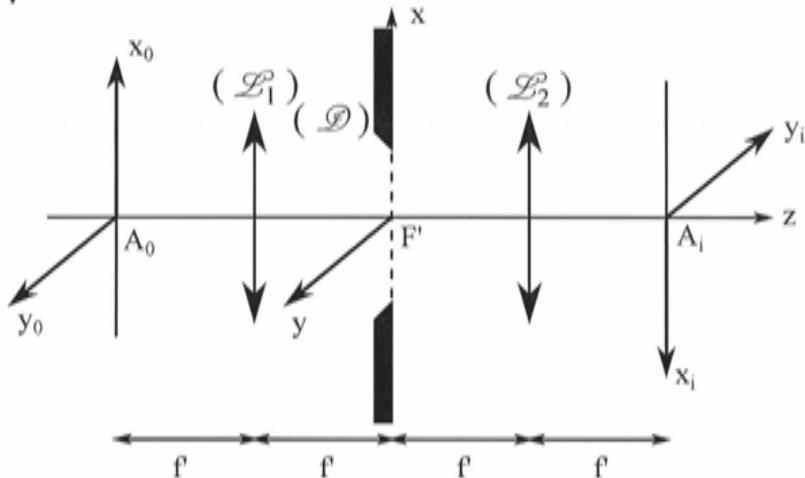


FIGURE 7 – Montage  $4f$

L'écran d'observation est situé dans le plan focal image de ( $\mathcal{L}_2$ ).

**E1.** Qu'observe-t-on sur l'écran ? Donner une estimation de la largeur de la tache centrale de diffraction  $\Delta x_i$  en fonction notamment de la distance focale  $f'$  et de la largeur de la fente  $b$ .

**E2.** En supposant que le spectre de transparence de la fente est continu et que les fréquences spatiales sont essentiellement comprises dans l'intervalle  $\Delta k$ , retrouver la relation mentionnée dans la question E1.

Une deuxième source lumineuse monochromatique de même longueur d'onde  $\lambda$ , **incohérente** avec la première, située dans le plan focal objet de la lentille ( $\mathcal{L}_1$ ) au point d'abscisse  $x_0 > 0$ , émet également une onde sphérique de même amplitude.

**E3.** Qu'observe-t-on sur l'écran ? Représenter l'allure du graphe de l'intensité lumineuse  $I = f(x_i)$  dans le plan focal image de ( $\mathcal{L}_2$ ). On précisera notamment l'abscisse  $x_i$  des images géométriques des deux sources.

**E4.** En admettant que les images de ces deux sources lumineuses ponctuelles ne peuvent être séparées que si le maximum de l'éclairement relatif à l'une des sources est situé sur ou au-delà du premier minimum de l'éclairement relatif à l'autre source, déterminer une condition sur  $x_0$  à exprimer en fonction de  $\lambda$ ,  $b$  (largeur de la fente) et  $f'$  pour qu'il en soit ainsi.

**TROISIEME PARTIE**  
**UN PEU DE PHYSIQUE DU**  
**LASER**

**F / CAVITE FABRY-PEROT ET LASER**

Une source de lumière pouvant être utilisée dans ce type de microscope est un laser femtosecondes Titane-Saphir. Les ondes lumineuses sont issues d'une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ .

Une cavité Fabry-Pérot est modélisée par deux lames planes semi-réfléchissantes  $L_1$  et  $L_2$  placées dans un milieu d'indice optique  $n \approx 1$ , infiniment minces, parallèles et distantes de  $e$ .

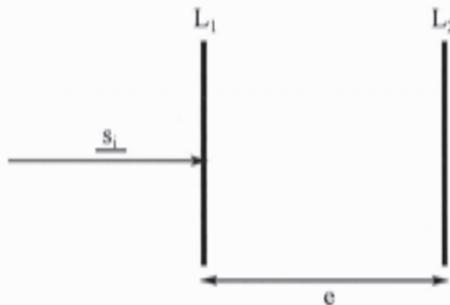


FIGURE 8 – Cavité Fabry-Pérot

Une onde plane d'amplitude  $\underline{s}$  incidente sur  $L_1$  (respectivement  $L_2$ ) donne naissance à une onde transmise d'amplitude  $t_1 \cdot \underline{s}$  (respectivement  $t_2 \cdot \underline{s}$ ) et à une onde réfléchie d'amplitude  $r_1 \cdot \underline{s}$  (respectivement  $r_2 \cdot \underline{s}$ ). Les coefficients  $r_1$  et  $r_2$  vérifient l'inégalité :

$$r_{1,2} < 1$$

On suppose que la cavité Fabry-Pérot est éclairée sous incidence normale par une onde d'amplitude  $s_i$ . Les ondes émergentes successives, d'amplitudes complexes  $\underline{s}_k$  (l'indice  $k = 0$  correspondant à l'onde n'ayant subi aucune réflexion) interfèrent pour donner une onde d'amplitude  $\underline{s}_t$ .

On envisage la situation suivante (questions **F1** à **F4**) : les miroirs sont quasiment parfaitement réfléchissants et on considère l'interférence de  $N$  ondes de même amplitude en sortie de la cavité.

**F1.** Déterminer le déphasage  $\phi$  entre deux ondes émergentes successives en fonction de  $e$  et  $\lambda$  puis en fonction de  $e$ ,  $c$  et  $\omega$ .

**F2.** Par analogie avec les modes propres de vibration d'une corde de Melde, déterminer les longueurs d'onde  $\lambda_n$  associées aux modes propres de cette cavité. Déterminer alors les expressions des pulsations  $\omega_n$  des modes propres en fonction de  $e$  et de  $c$  notamment.

*L'allure du graphe de l'intensité lumineuse en sortie de la cavité  $\mathcal{I} = f(\omega)$  est donnée sur la figure suivante. Il fait apparaître des pulsations de résonance  $\omega_n$  et une largeur à mi-hauteur  $\Delta\omega$ .*

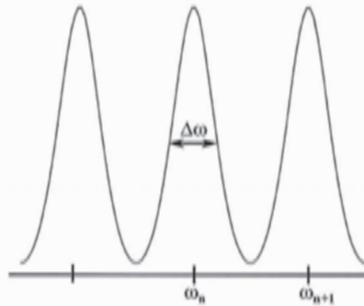


FIGURE 9 – Graphe  $\mathcal{I} = f(\omega)$

**F3.** En s'appuyant sur une construction de Fresnel, établir la demi-largeur des pics de la courbe d'intensité lumineuse en fonction du déphasage  $\phi$ . Donner alors une estimation de  $\Delta\omega$ .

**F4.** Quel est l'effet sur le profil des pics de l'intensité si  $N$  augmente ?

*En réalité, on peut montrer rigoureusement (calcul non demandé) que l'intensité lumineuse  $\mathcal{I}$  transmise par la cavité se met sous la forme :*

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{I}_{max}}{1 + m \cdot \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \text{ avec } m = \frac{4R}{(1-R)^2} \text{ où } R = r_1 \cdot r_2$$

*On affirme également que  $\mathcal{I}_{max} = \mathcal{I}_0$ , intensité lumineuse de l'onde incidente mais qu'en présence d'un milieu absorbant  $\mathcal{I}_{max} < \mathcal{I}_0$ .*

*La figure page suivante représente les graphes de la fonction  $f_m : x \mapsto \frac{1}{1+m \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$  pour différentes valeurs de  $m$ .*

*$\Delta\omega$  est dans la pratique très inférieur à l'écart entre deux pulsations de résonance successives.*

**F5.** A quelle condition (portant sur  $r_1$  et  $r_2$ ) en est-il ainsi ? En quoi cela est-il intéressant pour l'utilisation du laser dans le montage STED ?

**F6.** Le résultat précédent est-il cohérent avec celui énoncé dans la question F4 si on considère qu'en-deçà d'une certaine valeur d'amplitude, les ondes qui se superposent ne contribuent plus significativement à l'intensité lumineuse globale ?

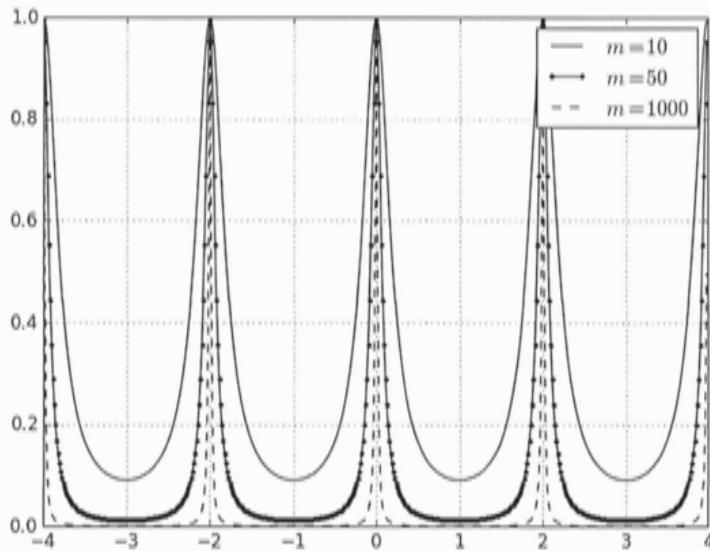


FIGURE 10 – Courbes représentatives de  $f_m : x \mapsto f_m(x)$  pour différentes valeurs de  $m$

La cavité Fabry-Pérot précédente est remplie d'un milieu amplificateur dont le gain (non saturé)  $g^0$  dépend de la pulsation  $\omega$ . Dans ces conditions, on admet que tout revient à remplacer dans les formules précédentes  $r_1.r_2$  par  $g^0(\omega).r_1.r_2$ .

Le graphe de  $g^0 = f(\omega)$  est représenté ci-dessous et fait apparaître une pulsation de résonance  $\omega_M$  et une largeur à mi-hauteur  $\Gamma$ . Sa valeur maximale  $g_M^0$  est réglable. On suppose que  $\Gamma \gg \Delta\omega$ .

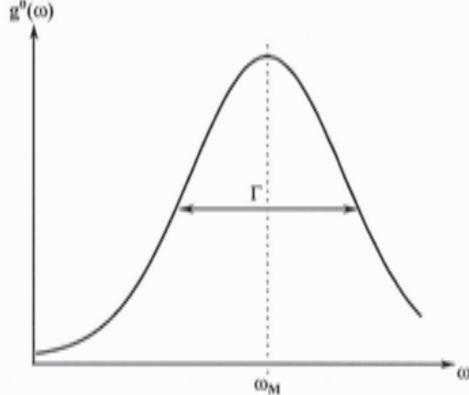


FIGURE 11 – Graphe  $g^0 = f(\omega)$

Un laser, comme les oscillateurs développés en électronique, repose sur l'application d'une boucle de rétroaction à un système amplificateur de gain  $g^0$  en amplitude. L'amplificateur laser est placé dans une boucle de rétroaction généralement assurée par une cavité de type Fabry-Pérot.



FIGURE 12 – Schéma bloc d'un oscillateur

**F7.** Montrer qu'une onde lumineuse de pulsation  $\omega_n$  peut apparaître en sortie de la cavité ( $s_t \neq 0$ ) si  $g^0(\omega_n)$ ,  $r_1$  et  $r_2$  vérifient une inégalité à préciser (**condition d'accrochage**).

*L'intensité lumineuse circulant dans la cavité ne peut pas augmenter indéfiniment à chaque passage de l'onde dans le milieu amplificateur. En effet, le gain est presque toujours une fonction décroissante de l'intensité  $\mathcal{I}$  de l'onde lumineuse circulant dans la cavité à cause des effets de saturation se produisant à haute intensité. Il s'ensuit que  $g(\mathcal{I}, \omega_n) < g^0(\omega_n)$ .*

**F8.** En déduire l'égalité existant entre  $g(\mathcal{I}, \omega_n)$ ,  $r_1$  et  $r_2$  en régime stationnaire de fonctionnement déterminant alors l'intensité lumineuse  $\mathcal{I}$  du faisceau laser.

## G / FAISCEAU GAUSSIEN EN SORTIE D'UN LASER

*L'intensité lumineuse de l'onde émergeant du laser a pour expression :*

$$\mathcal{I}(r, z) = \mathcal{I}_0 \cdot \exp\left(-2 \frac{r^2}{w^2(z)}\right)$$

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  représente la distance à l'axe ( $z'z$ ) d'un point courant dans le plan transversal.
- La distance  $w(z)$  est appelée le *rayon de la section droite du faisceau gaussien dans le plan de front de coordonnée  $z$* .

*En introduisant la distance  $z_R$  appelée longueur de Rayleigh, et  $w_0$  la valeur minimale du rayon du faisceau (le *waist* du faisceau gaussien), on a les relations suivantes :*

$$z_R = \frac{\pi \cdot w_0^2}{\lambda} \quad \text{et} \quad w^2(z) = w_0^2 \cdot \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)$$

*On se place dans le plan perpendiculaire à l'axe ( $z'z$ ) d'équation  $z = 0$  défini par la valeur minimale  $w_0$  du rayon du faisceau.*

**G1.** Tracer l'allure du graphe  $\mathcal{I} = f(r)$ .

**G2.** Déterminer l'expression approchée de  $w(z)$  dans le cas où  $z \gg z_R$  puis tracer le graphe de la fonction  $w = f(z)$ .

**G3.** Pour quelles valeurs de  $z$  peut-on assimiler le faisceau laser à un faisceau cylindrique ? à un faisceau conique divergent de sommet O ?

**G4.** A partir des considérations précédentes, estimer l'angle  $\theta_0$  caractérisant la divergence du faisceau gaussien due à la diffraction (on dit que le faisceau laser « s'auto-diffracte ») qui accompagne la propagation ?

**G5.** Faire l'application numérique pour le laser Titane-Saphir excitateur du microscope STED de diamètre minimal  $2 w_0 \sim 1$  mm. On donne la longueur d'onde dans le vide :  $\lambda_{exc} = 571$  nm

### Estimation du diamètre de la zone éclairée par le laser excitateur :

*On souhaite focaliser le faisceau gaussien du laser sur l'échantillon à analyser. La distance focale de la lentille convergente modélisant l'objectif d'un microscope STED est  $f' \approx 5$  mm et ce dernier est plongé dans l'air.*

*On considère que le faisceau incident est cylindrique.*

**G6.** Calculer la longueur de Rayleigh et justifier la forme cylindrique du faisceau incident. Faire un schéma où on indiquera les principales grandeurs nécessaires.

**G7.** En admettant qu'une lentille mince transforme un faisceau gaussien de waist  $w_0$  en un autre faisceau gaussien de waist  $w'_0$ , estimer le diamètre de la zone de focalisation et le comparer à ce que l'on peut obtenir avec la technique STED.

## H / FAISCEAU STED ET MODES DE LAGUERRE-GAUSS

Approximation de l'enveloppe lentement variable :

On considère que l'onde électromagnétique en sortie du laser possède l'expression suivante :

$$\overrightarrow{E}(r, z, t) = \mathcal{E}(r, z) e^{i(k.z - \omega.t)} \vec{u}_x$$

avec :

- $\omega = k.c$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\mathcal{E}(r, z)$  décrit l'enveloppe du faisceau laser

**H1.** L'onde électromagnétique étudiée est-elle progressive ? monochromatique ? plane ? polarisée ? Bien justifier la réponse.

**H2.** Établir l'équation de propagation dont le champ électrique  $\overrightarrow{E}$  est solution. Exprimer la célérité  $c$  en fonction des constantes  $\mu_0$  et  $\varepsilon_0$ .

On donne le laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 f}{d\theta^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} = \Delta_{\perp} f + \frac{d^2 f}{dz^2}$$

**H3.** Montrer qu'alors l'enveloppe  $\mathcal{E}$  est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_{\perp} + 2i.k \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E} = 0$$

**H4.** Sachant que l'échelle de variation dans la direction  $z$  est grande devant la longueur d'onde  $\lambda$ , montrer qu'on peut négliger le terme  $\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2}$  devant celui en  $k \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$  et que l'équation précédente peut être simplifiée selon :

$$\left( \Delta_{\perp} + 2i.k \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E} = 0$$

On pourra introduire la longueur de Rayleigh  $z_R$ .

### Solutions de l'équation de l'enveloppe lentement variable :

Dans l'approximation dite de Fraunhofer<sup>3</sup>, on peut montrer que les solutions de l'équation de l'enveloppe lentement variable peuvent être de type gaussien selon :

$$\mathcal{E}(r, z) \sim \mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{k}{2q(z)}} \exp\left(-i.k \frac{r^2}{2q(z)}\right) \text{ où } q(z) = z + i.z_R$$

et que l'intensité du faisceau lumineux est telle que :

$$\mathcal{I}(r, z) \propto \exp\left(-2 \frac{r^2}{w^2(z)}\right)$$

### Faisceaux gaussiens d'ordre supérieur :

Les faisceaux gaussiens obtenus peuvent se généraliser à des bases de fonctions solutions de l'équation de l'enveloppe lentement variable. Une des deux principales familles de solutions exploitées pour réaliser le faisceau STED est constituée par les modes de Laguerre-Gauss :

$$\mathcal{E}(r, \theta, z) = \mathcal{L}_{m,n}(r) \cdot e^{-r^2/w^2(z)} \cdot e^{i.m.\theta}$$

où les  $\mathcal{L}_{m,n}$  sont des polynômes de Laguerre.

La figure suivante représente des profils expérimentaux de ce type de solution :

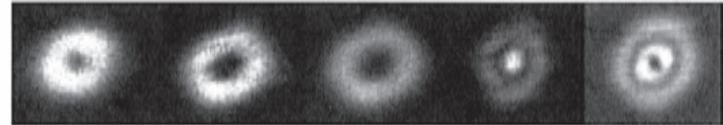


FIGURE 13 – Modes de Laguerre-Gauss  $LG_{10}$ ,  $LG_{20}$ ,  $LG_{30}$ ,  $LG_{11}$  et  $LG_{21}$

## I / CONDITIONS POUR UNE DEPLETION EFFICACE

On cherche dans cette partie à comprendre les conditions de déplétion efficace aboutissant à l'amélioration du pouvoir de résolution de ce type de microscope. Les équations différentielles régissant l'évolution temporelle des populations des différents niveaux électroniques et vibrationnels des fluorophores sont :

$$\frac{dn_1^*}{dt} = \frac{\sigma_{abs} \cdot I_{exc}}{\hbar \omega_{exc}} (n_0 - n_1^*) - \frac{n_1^*}{\tau_{vib}} \quad (1)$$

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{n_1^*}{\tau_{vib}} - \frac{\sigma \cdot I_{STED}}{\hbar \omega} (n_1 - n_0^*) - \frac{n_1}{\tau_{fluo}} \quad (2)$$

$$\frac{dn_0^*}{dt} = \frac{\sigma \cdot I_{STED}}{\hbar \omega} (n_1 - n_0^*) + \frac{n_1}{\tau_{fluo}} - \frac{n_0^*}{\tau_{vib}} \quad (3)$$

$$\frac{dn_0}{dt} = -\frac{\sigma_{abs} \cdot I_{exc}}{\hbar \omega_{exc}} (n_0 - n_1^*) + \frac{n_0^*}{\tau_{vib}} \quad (4)$$

3. approximation en champ lointain de la figure de diffraction par un objet diffractant

- I1.** On considère l'**équation (2)** du système différentiel précédent. Interpréter physiquement les trois termes du membre de droite.

*Afin d'obtenir une dépendance non-linéaire de la population  $n_1$  par rapport à l'intensité  $I_{STED}$ , on utilise une excitation impulsionale  $I_{exc}$  (donc de très courte durée), un faisceau STED intense ( $I_{STED} \gg \frac{\hbar\omega}{\sigma.T_{fluo}}$ ) et une impulsion STED assez longue pour permettre la relaxation vibrationnelle (voir **FIGURE 2A**) page 4.*

- I2.** En vous appuyant sur des arguments physiques précis, que peut-on dire alors de la population du niveau  $n_0^*$ ?
- I3.** En travaillant toujours avec l'équation (2), montrer que l'un des termes du membre de droite devient prépondérant devant les autres. Vous vous appuierez sur une argumentation physique pertinente.
- I4.** Montrer qu'on a bien dans ces conditions :

$$n_1 \sim \exp\left(-\frac{\tau.\sigma.I_{STED}}{\hbar\omega}\right)$$

où  $\tau$  désigne la durée du pulse STED.

## QUATRIEME PARTIE

## RESOLUTION NUMERIQUE ET

## TRAITEMENT D'IMAGES

### Note aux candidats :

- Les questions relatives à la partie informatique s'appuient sur les langages Python et Scilab. Vous choisissez l'un des deux langages proposés pour répondre aux questions.
- Certaines instructions utiles relatives aux deux langages ont été rappelées en annexe.
- Les symboles « # » et « // » indiquent respectivement les commentaires dans le code Python et le code Scilab.
- **Aucun module ou bibliothèque associé au traitement d'images n'est autorisé.**

## J / CALCUL DE LA DEPLETION PAR LA METHODE D'EULER EXPLICITE

*On souhaite résoudre numériquement par la méthode d'Euler explicite, le système d'équations différentielles précédent (sous-partie I) régissant le phénomène de déplétion.*

*Afin de simplifier l'écriture, les constantes deviennent :*

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{abs}}{\hbar \cdot \omega_{exc}}, \sigma_2 = \frac{\sigma}{\hbar \cdot \omega}, k_1 = \frac{1}{\tau_{vib}} \text{ et } k_2 = \frac{1}{\tau_{fluo}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_1^*}{dt} &= \sigma_1 \cdot I_{exc}(t) (n_0 - n_1^*) - k_1 \cdot n_1^* \\ \frac{dn_1}{dt} &= k_1 \cdot n_1^* - \sigma_2 \cdot I_{STED}(t) (n_1 - n_0^*) - k_2 \cdot n_1 \\ \frac{dn_0^*}{dt} &= \sigma_2 \cdot I_{STED}(t) (n_1 - n_0^*) + k_2 \cdot n_1 - k_1 \cdot n_0^* \\ \frac{dn_0}{dt} &= -\sigma_1 \cdot I_{exc}(t) (n_0 - n_1^*) + k_1 \cdot n_0^* \end{aligned}$$

Avec les conditions initiales à  $t = 0$  :  $n_0(0) = 1$  et  $n_1^*(0) = n_1(0) = n_0^*(0) = 0$

*Les impulsions laser temporelles du faisceau exciteur  $I_{exc}(t)$  et du faisceau de stimulation  $I_{STED}(t)$  sont définies par le modèle Gaussien suivant :*

$$I_{laser}(t) = \hat{I}_{laser} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\tau^2}}$$

*avec  $\tau$ ,  $\mu$ ,  $\hat{I}_{laser}$  représentant respectivement la largeur à mi-hauteur, la position temporelle de l'impulsion et l'amplitude maximale de l'impulsion.*

- J1.** Définir en langage de programmation, la fonction associée à l'impulsion de l'excitation  $I_{exc}(t)$ ,  $fIexc(t, \hat{I}_{exc})$ , en choisissant  $\tau_{exc} = 10 \times \tau_{vib}$  et  $\mu_{exc} = 100 \times tvib$  avec  $\tau_{vib}$ , la constante de temps vibrationnelle, prise comme unité de temps de la simulation.
- J2.** On choisit pour l'impulsion STED,  $\tau_{sted} = 20 \times \tau_{vib}$  et  $\mu_{exc} = 150 \times tvib$ . Justifier qualitativement la valeur de ces constantes conformément au phénomène de microscopie STED.
- J3.** Compléter sur votre copie, le programme suivant en créant le tableau  $t$  des valeurs temporelles discrétisées de l'intervalle de simulation  $[t_{min}, t_{max}]$ , avec  $t_{min} = 0$  et  $t_{max} = 200 \times tvib$ .  
Exprimer le pas de temps  $h$  en fonction des données du problème.

Listing 1 – code python

```
tvib=0.001;N=100#Nombre de points
tmin=
tmax=
t=
h=
```

Listing 2 – code scilab

```
tvib=0.001;N=100//Nombre de points
tmin=
tmax=
t=
h=
```

- J4.** Rappeler le schéma numérique de la méthode d'Euler explicite qui associe aux grandeurs définies par l'équation différentielle  $y' = f(t, y(t))$ , les grandeurs discrètes définies par l'équation de récurrence  $y_{i+1} = G(t_i, y_i, h)$ , avec  $y(t_i) = y_i$  et  $h$ , le pas de temps.
- J5.** Écrire alors les relations de récurrence associées aux grandeurs  $n_0^*$ ,  $n_1^*$ ,  $n_1$  et  $n_0$  en fonction du pas  $h$ , des constantes du problème et des impulsions laser.

On donne le code suivant permettant de simuler les différentes grandeurs  $n_1^*(t)$  (*N1vib*),  $n_1(t)$  (*N1*),  $n_0^*(t)$  (*N0vib*) et  $n_0(t)$  (*N0*). On suppose les fonctions  $fIexc(t, \hat{I}_{exc})$  et  $fIsted(t, \hat{I}_{sted})$  préalablement définies. Les constantes du programme *maxIexc* et *maxIsted* sont associées respectivement aux constantes  $\hat{I}_{exc}$  et  $\hat{I}_{sted}$ .

Listing 3 – code python

```
sigmal=(tvib/100.); sigma2=(tvib/100.); k1=(1/tvib); k2=1/(1000*tvib);
maxIexc=10e6; maxIsted=70e6
N0=zeros(N+1,float); N0[0]=1.; N0vib=zeros(N+1,float); N1=zeros(N+1,float);
N1vib=zeros(N+1,float)
for i in range(N):
    N1vib[i+1]=
    N1[i+1]=
    N0vib[i+1]=
    N0[i+1]=
```

## Listing 4 – code scilab

```

sigma1=(tvib/100.); sigma2=(tvib/100.); k1=(1/tvib); k2=1/(1000*tvib);
maxIexc=10e6; maxIsted=70e6;
N0=zeros(N+1,1); N0(1,1)=1; N0vib=zeros(N+1,1); N1=zeros(N+1,1);
N1vib=zeros(N+1,1);
for i=1:(N)
    N1vib(i+1,1)=
    N1(i+1,1)=
    N0vib(i+1,1)=
    N0(i+1,1)=
end

```

**J6.** Justifier la taille des tableaux créés dans ce programme.

**J7.** Compléter sur votre copie, l'instruction associée au tableau  $N0$ , située dans la boucle FOR.

## K / INSTABILITE ET SCHEMA IMPLICITE

En choisissant pour la simulation  $[\hat{I}_{STED} = 0 \text{ MW.cm}^{-2}$ ,  $\hat{I}_{exc} = 30 \text{ MW.cm}^{-2}$ ], puis  $[\hat{I}_{STED} = 0 \text{ MW.cm}^{-2}$ ,  $\hat{I}_{exc} = 70 \text{ MW.cm}^{-2}$ ] avec un nombre de points  $N = 100$ , on obtient les résultats de simulation à la **FIGURE 14** qui montre la variation dans le temps de la population relative  $n_0(t)$ .

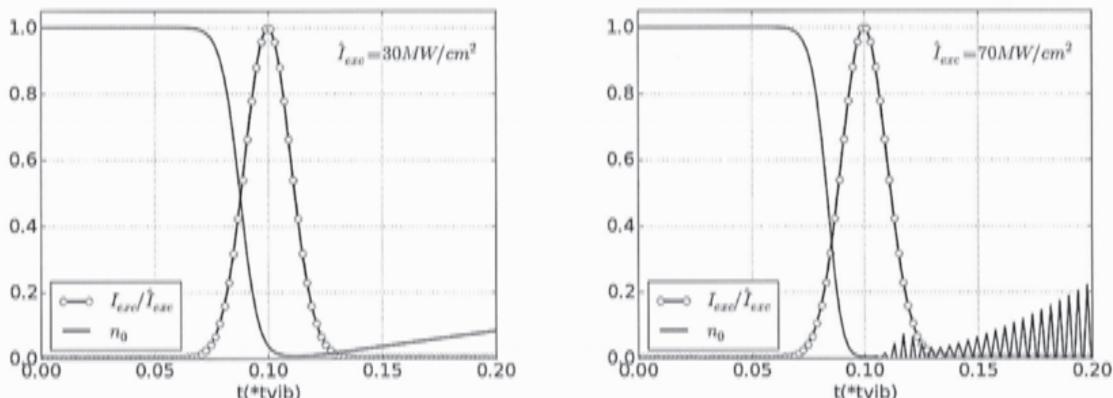


FIGURE 14 – Population  $n_0$  et stabilité du schéma pour  $\hat{I}_{exc} = 30 \text{ MW.cm}^{-2}$  et instabilité pour  $\hat{I}_{exc} = 70 \text{ MW.cm}^{-2}$

**K1.** Donner une explication qualitative qui permet de justifier le comportement de la population  $n_0(t)$  lorsque  $\hat{I}_{exc} = 70 \text{ MW.cm}^{-2}$ . Sur quelle constante du programme doit-on agir afin d'obtenir un résultat cohérent ?

On donne, ci-après,  $q_0$ , la raison de la suite associée à la population  $n_0$ .

$$q_0(t) = 1 - h \cdot \sigma_1 \cdot I_{exc}(t)$$

**K2.** En considérant que cette suite converge lorsque  $0 < q_0(t) < 1$ , déterminer le nombre minimal de points de simulation,  $N$ , assurant la convergence des calculs pour  $\hat{I}_{exc} = 70 \text{ MW.cm}^{-2}$ . Conclure sur l'inconvénient majeur de cette méthode numérique.

On rappelle ci-dessous le schéma numérique de la méthode d'Euler implicite utilisé pour résoudre les équations différentielles du type  $y'(t) = f(t, y)$  :

$$y_{i+1} = y_i + hF(t_{i+1}, y_{i+1}) \text{ avec } h \text{ le pas de temps et } y(t_{i+1}) = y_{i+1}$$

**K3.** En utilisant le schéma d'Euler implicite, déterminer l'expression de  $n_{0i+1}$  en fonction de  $n_{0i}$ ,  $n_{1i+1}^*$ ,  $n_{0i+1}^*$  et des constantes du problème.

On donne, ci-après,  $q_0$ , la raison de la suite associée à la population  $n_0$  dans le cas de la méthode d'Euler implicite.

$$q_0(t) = \frac{1}{1+h\sigma_1 I_{exc}(t)}$$

**K4.** Déterminer les conditions sur les variables  $h$  et  $\hat{I}_{exc}$  permettant de garantir la convergence. Quel est l'avantage de ce schéma numérique par rapport au premier ?

## L / EFFICACITE STED

Les graphiques suivants, (FIGURE 15) illustrent l'effet du faisceau STED sur la déplétion de la population relative  $n_1$ . En effet, lors de l'application du faisceau STED, la population  $n_1^{STED}$  est fortement diminuée provoquant une inhibition de la fluorescence concernant la zone spatiale délimitée par la couronne du faisceau STED.

L'efficacité STED peut être alors estimée par le calcul de  $\epsilon$ , donné pour un décalage temporel  $\Delta t$  entre les deux impulsions :

$$\epsilon(\Delta t) = \frac{\int_{t_{min}}^{t_{max}} (1 - n_1^{STED}(t)) . dt}{\int_{t_{min}}^{t_{max}} n_1(t) . dt}$$

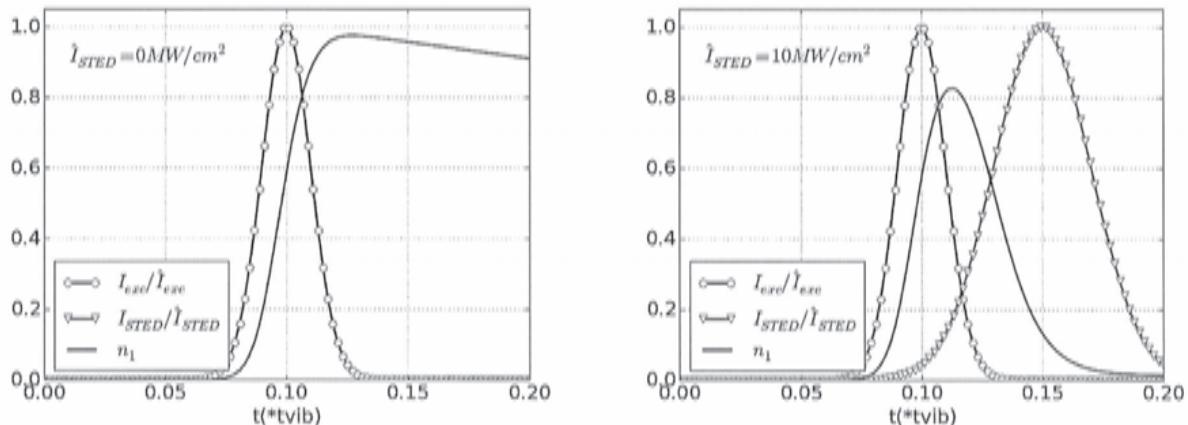


FIGURE 15 – Population  $n_1$  : sans faisceau STED (à gauche) et avec faisceau STED (à droite)

- L1.** Rappeler la méthode des rectangles afin d'intégrer numériquement la courbe  $n_1(t)$  définie par un tableau de  $N$  valeurs.
- L2.** Écrire le programme permettant de calculer  $\epsilon$  à partir des tableaux  $n_1^{STED}$  et  $n_1$ , considérés remplis suite à la méthode d'Euler implicite au pas temporel  $h$ .
- L3.** On admet que l'erreur de calcul associée à la méthode des rectangles augmente proportionnellement en fonction de la valeur de  $h$ . Donner la classe de complexité de l'erreur en fonction du nombre de points  $N$ .

## M / TRAITEMENT D'IMAGES

Les entreprises comme Leica (STED), Carl Zeiss, Nikon et DeltaVision OMX fabriquent des microscopes à fluorescence et fournissent également le logiciel d'acquisition, d'analyse, de traitement des images et de balayage  $[x, y]$ .

A la base de l'acquisition des images, on retrouve des capteurs CCD (**FIGURE 16**) ou CMOS. Ce sont des capteurs matriciels [Largeur, Hauteur] où chaque élément appelé **photosite** reçoit une intensité lumineuse proportionnelle aux nombre de photons. Cette intensité lumineuse est convertie en signal électrique qui subit à son tour une conversion en binaire, grâce à un convertisseur analogique-numérique (CAN).

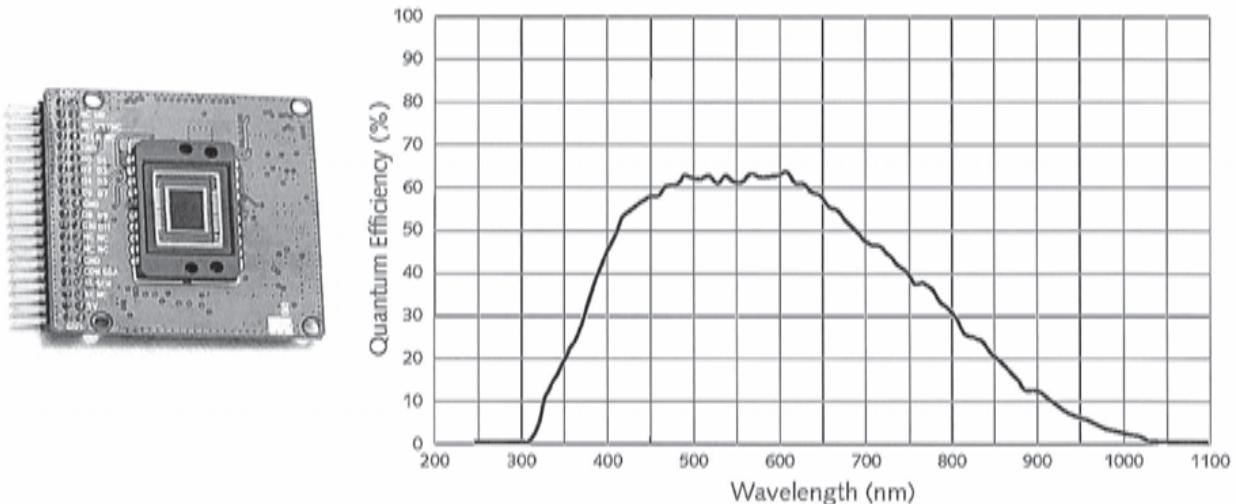


FIGURE 16 – Capteur CCD et Diagramme d'efficacité (Sony, Photometrics)

Dans le cas d'images monochromes, à chaque pixel  $(i, j)$  du capteur CCD est associée une valeur binaire  $V$  de 8, 10, 12 ou 16 bits non signée qui est proportionnelle à l'intensité lumineuse. On définit alors l'intensité lumineuse  $I$  du pixel  $(i, j)$ , par :

$$I(i, j) = V$$

**M1.** Le capteur CCD d'un microscope STED commercialisé est représenté à la **FIGURE 16**, accompagné de son diagramme d'efficacité qui est une fonction de la longueur d'onde des photons.

Justifier l'utilisation de ce capteur par rapport à la longueur d'onde des photons de l'application STED.

**M2.** Ce capteur CCD est une matrice de pixels de 1392 pixels de largeur et de 1040 pixels de hauteur. La résolution du CAN est de 12 bits. Calculer la taille en octets d'une image mesurée par ce capteur. Donner également en base 10 la plus petite valeur  $V_{min}$  et la plus grande valeur  $V_{max}$  à la sortie du CAN.

*Une image monochrome (niveaux de gris) peut être modélisée du point de vue informatique par l'intermédiaire d'un tableau à deux dimensions (2D) où la largeur et la hauteur en pixels correspondent respectivement au nombre de colonnes et au nombre de lignes du tableau 2D. Le premier pixel situé en haut à gauche de l'image correspond au premier élément du tableau.*

*Suite à l'acquisition d'une image obtenue par microscopie par fluorescence, l'image en niveaux de gris affichée par un logiciel commercialisé est représentée à la **FIGURE 17** ( $760 \times 753$  pixels, 8 bits). On distingue quelques taches grises très foncées (cellules vivantes) dans un fond noir. On suppose que le tableau **imSrc** contient les valeurs de chaque pixel associées à cette image.*

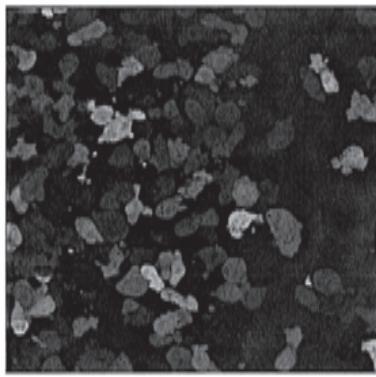


FIGURE 17 – Image brute

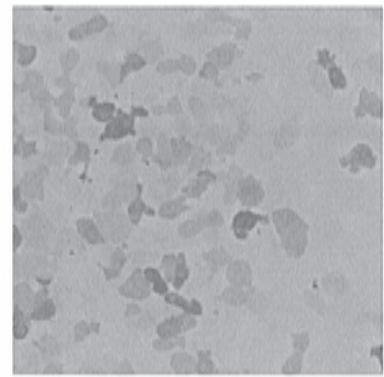


FIGURE 18 – Image inversée

**M3.** Créer en langage de programmation, une image **imSrc** de  $760 \times 753$  pixels dont chaque valeur est initialisée à 0. Préciser les valeurs numériques des index minimum et maximum de ce tableau 2D.

*Afin d'améliorer au final, le contraste de l'image, on s'intéresse à la première étape du traitement de l'image qui consiste à obtenir l'image de droite (**FIGURE 18**) par inversion des niveaux de gris de l'image de départ (**FIGURE 17**), définie par l'opération matricielle suivante où  $I'(i, j)$  représente la nouvelle image inversée.*

$$I'(i, j) = V_{max} - I(i, j)$$

**M4.** Écrire le programme permettant de réaliser ce traitement à partir du tableau **imSrc[i,j]**. Le nouveau tableau **imDest1[i,j]** contiendra le résultat de ce traitement. On précisera clairement les bornes des boucles d'indexation.

*La deuxième étape du traitement consiste à déterminer l'histogramme des niveaux de gris de l'image inversée.*

*L'histogramme d'une image en niveaux de gris est un graphique dont les abscisses représentent les niveaux de gris contenus dans l'image analysée. Les ordonnées quant à elles représentent le nombre de pixels associés à chaque niveau de gris.*

**M5.** Écrire le programme permettant de remplir un tableau **tabHisto** représentant l'histogramme en niveaux de gris de l'image inversée  $I'(i, j)$  (**FIGURE 19**). Créez au préalable les variables nécessaires.

Le dernier traitement consiste à corriger l'histogramme afin de mettre en évidence les cellules vivantes (**FIGURE 20**). Chaque niveau de gris de la nouvelle image  $I''(i, j)$  est calculé d'après la correction linéaire suivante :

$$I''(i, j) = scale \cdot \frac{I'(i, j) - valMin}{valMax - valMin}$$

où la variable **scale** représente le facteur d'étirement de valeur de 0 à 255 et **valMin**, **valMax** représentent respectivement, les valeurs des abscisses délimitant l'histogramme de la figure 19.

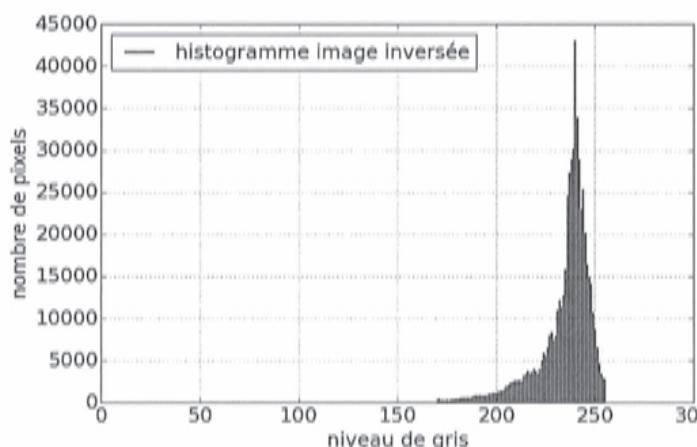


FIGURE 19 – Histogramme image inversée

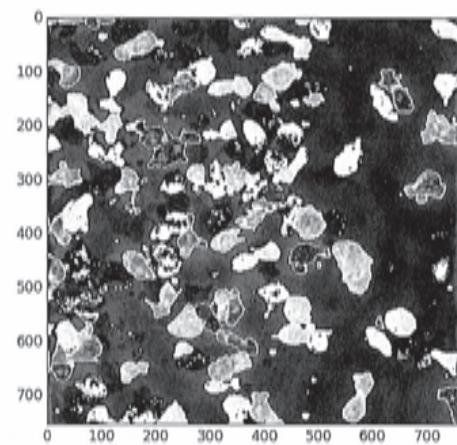


FIGURE 20 – Image contrastée

**M6.** Écrire le programme permettant de corriger l'histogramme avec **scale=255**, **valMin=212** et **valMax=248**. Le nouveau tableau **imDest2[i,j]** contiendra le résultat de ce dernier traitement.

Fin de l'épreuve

## 1 Annexe : Quelques instructions en Python

Définition d'une fonction Python avec arguments en entrée et retour de valeur :

Listing 5 – code python

```
def maFonction(arg1,arg2,...):
    ...
    ...
    return(...)
```

Manipulation de tableaux avec Numpy. L'index des tableaux Python commence à 0.

Listing 6 – code python

```
from numpy import*
N=100;N1=100;N2=100
#Création d'un tableau d'une ligne
tab0=array([0,1,2,3,4,5])
#Création d'un tableau de N valeurs uniformément réparties entre Nmin et
#Nmax
tab1=linspace(Nmin,Nmax,N)
#Création d'un tableau de N valeurs initialisées à 0
tab2=zeros(N)
#Création d'un tableau de N1 x N2 valeurs initialisées à 0
tab3=zeros((N1,N2))
#Indexation d'un tableau à une dimension
i=12,j=13
tab2[i]=1
#Indexation d'un tableau à deux dimensions
tab3[i][j]=3
```

Boucles en Python :

Listing 7 – code python

```
#Boucle For
N=10
for i in range(N):
    instruction 1
    instruction 2
    ...
#Boucle While
i=0
while(i<N):
    instruction 1
    instruction 2
    ...
    i=i+1
```

# RAPPORT DE JURY 2016

## EPREUVE DE PHYSIQUE-MODELISATION FILIERE PC

Durée 4 heures

### PRESENTATION DU SUJET

Ce sujet se proposait d'aborder modestement certains aspects des travaux de S. Hell sur la microscopie STED qui lui valut l'attribution du prix Nobel de chimie en 2014. La première partie de ce sujet consistait en une activité documentaire permettant aux étudiants de cerner les principaux phénomènes mis en jeu ainsi que le principe de la microscopie STED.

Une deuxième partie se proposait, à partir des considérations d'optique de Fourier, de retrouver le critère de Rayleigh relatif à la limitation de la résolution transversale des microscopes optiques due à la diffraction.

Une troisième partie plus conséquente s'intéressait à la physique du laser (rôles du milieu amplificateur et de la cavité Fabry-Pérot), à la production d'un faisceau gaussien et à sa focalisation au foyer principal image d'une lentille mince convergente, à la propagation dans le vide de l'onde laser et se concluait par la recherche de conditions permettant de réaliser le phénomène de déplétion efficace à la base de cette technique de microscopie.

Une quatrième partie s'inscrivait pleinement dans la continuité des précédentes où il était question de résoudre numériquement dans un premier temps par la méthode d'Euler explicite le système d'équations différentielles régissant l'évolution temporelle des populations des différents niveaux énergétiques mis en jeu. Il s'agissait ensuite de mettre en évidence les limites d'un tel schéma numérique puis d'utiliser un schéma d'Euler implicite plus stable. Un calcul d'efficacité définie au sens de Hell permettait de mettre en œuvre une estimation numérique d'intégrale par la méthode des rectangles. Enfin le sujet se terminait par un traitement d'images en niveaux de gris afin d'en améliorer le contraste.

### COMMENTAIRE GENERAL SUR L'EPREUVE

Le sujet, tel qu'il était conçu, devait permettre aux étudiants de progresser convenablement dans sa résolution grâce à ses nombreuses questions de cours posées. Malheureusement, trop peu de copies sont satisfaisantes.

Nombreux sont les étudiants qui ne prennent pas le temps de s'approprier les informations de l'activité documentaire ce qui a entraîné une compréhension erronée et très insuffisante du phénomène étudié.

Beaucoup de notions de cours demeurent très confuses dans l'esprit des étudiants en raison d'une acquisition de ces dernières insuffisante et d'un manque de recul évident.

Souvent les calculs sont menés sans aucune rigueur : des scalaires = des vecteurs, des valeurs absolues absentes, des recherches d'équivalents folkloriques, des fautes d'homogénéité \dots. Enfin, ces mêmes calculs sont menés de manière très partielle ce qui est révélateur d'une absence de maîtrise de ces derniers.

De graves lacunes sur l'utilisation de chiffres significatifs dans les applications numériques apparaissent très fréquemment. Le jury tient à cette occasion à rappeler qu'une application numérique sans unité est sans valeur.

## ANALYSE PAR PARTIE

### PREMIERE PARTIE : RESOLUTION SUB-LONGUEUR D'ONDE ET MICROSCOPIE STED

#### A. Interaction rayonnement-matière

A1. Il s'agissait d'une question de culture scientifique. Bon nombre d'étudiants sont incapables de donner la signification de l'acronyme laser.

A2 à A5. Il s'agissait de questions de cours. On peut noter chez certains étudiants une lecture trop partielle du sujet ce qui les a conduit à travailler sur des systèmes à plusieurs niveaux et non à deux niveaux. Peu de réponses sont correctes ; les bilans réalisés sont souvent faux.

A6 et A7. Deux questions portant sur l'analyse documentaire. Rares ont été les réponses correctes. La lecture des différents articles n'est pas assez approfondie.

#### B. Utilisation d'un masque de phase

B1. L'optique géométrique reste souvent énigmatique chez beaucoup d'étudiants. Les foyers d'une lentille divergente sont virtuels et non réels ; le tracé des rayons lumineux est souvent réalisé sans aucune rigueur.

B2. De nombreuses erreurs dans l'estimation du diamètre  $D'$  du faisceau lumineux. Beaucoup de démonstrations complexes alors qu'il s'agit d'utiliser des notions de base de géométrie.

B3. Si la condition sur la différence de marche pour obtenir des interférences destructives est souvent énoncée correctement, le calcul de  $\delta$  pose beaucoup de problèmes.

#### C. Critère de Rayleigh

C1. Peu de réponses satisfaisantes.

C2 et C3. Ces deux questions ont été dans l'ensemble bien traitées.

C4. Peu d'initiatives de la part des étudiants. Les arguments fournis ne sont que très superficiels.

### DEUXIEME PARTIE : DIFFRACTION EN OPTIQUE ET OPTIQUE DE FOURIER

Cette partie a été très mal traitée et est révélatrice d'un manque de maîtrise de ces notions de la part des étudiants.

#### D. Diffraction par un réseau

Un festival de réponses erronées voire folkloriques. Lorsque l'expression mathématique de l'amplitude complexe de l'onde transmise est établie, de nombreuses difficultés quant à la détermination de la direction de propagation des différentes ondes planes sont notées.

#### E. Diffraction par une fente infiniment longue

E1 et E2. Peu d'étudiants évoquent le phénomène de diffraction. Les dimensions de la tache centrale sont fausses et souvent non homogènes. Une figure de diffraction n'est pas une réponse satisfaisante à la question *qu'observe-t-on sur l'écran ?* Il faut la décrire.

E3 et E4. Beaucoup d'étudiants font interférer des sources incohérentes. Peu font le graphe de l'intensité. Le critère de Rayleigh est rarement établi ni même évoqué.

## TROISIÈME PARTIE : UN PEU DE PHYSIQUE DU LASER

### F. Cavité Fabry-Pérot et laser

F1. Des confusions entre différence de phase et ordre d'interférences sont relevées. Beaucoup de fautes d'homogénéité et de nombreuses erreurs sur le calcul de *delta*.

F2. Souvent bien traitée.

F3 à F8. Questions très peu traitées. L'utilisation du diagramme de Fresnel n'est pas naturelle.

### G. Faisceau gaussien en sortie d'un laser

G1 et G2. Il s'agit là encore de questions de cours. On note un manque de rigueur dans le tracé des graphes (tangente à l'origine...). La simplification d'expressions dans le cas où certains termes sont négligeables devant d'autres est réalisée trop souvent sans aucune rigueur mathématique.

G3 à G6. Des questions de cours. Ces questions ont été bien traitées lorsqu'elles ont été abordées.

G7. Cette question laissait une certaine initiative à l'étudiant et a été très peu abordée.

### H. Faisceau STED et modes de Laguerre-Gauss

H1. Il n'est pas admissible de ne pas savoir définir et justifier les termes onde plane, monochromatique, polarisée...

H2. De nombreuses réponses correctes à cette question très classique.

H3 et H4. Quelques bonnes réponses mais souvent des calculs conduits sans aucune rigueur mathématique et qui n'aboutissent pas.

### I. Conditions pour une déplétion efficace

Cette partie demandait une analyse physique assez fine de la part des étudiants.

I1. Souvent bien traitée.

I2 à I4. Ces questions demandaient une argumentation physique pertinente. Beaucoup d'étudiants se contentent de vagues propos. Certains candidats ont néanmoins très bien traité ces questions.

## QUATRIÈME PARTIE : RESOLUTION NUMÉRIQUE ET TRAITEMENT D'IMAGES

Globalement, la partie aspects numériques a été bien mieux traitée que la partie physique mais le jury note encore que certains candidats n'abordent pas cette partie.

### J. Calcul de la déplétion par la méthode d'Euler explicite

Cette partie a été correctement traitée par les étudiants.

### K. Instabilité et schéma implicite

Peu d'étudiants ont abordé cette partie. L'objectif de cette dernière a été compris néanmoins.

**L. Efficacité STED**

L1. Le principe de la méthode des rectangles est compris.

L2. Le jury tient à rappeler qu'écrire un programme ne nécessite pas forcément d'écrire une fonction qui plus est si elle n'est pas utilisée.

L3. La classe de complexité de l'erreur est souvent connue.

**M. Traitement d'images**

M1. Les réponses à cette question sont parfois mal justifiées.

M2. Le calcul de la taille de l'image exprimée en octets a parfois posé des difficultés.

M3 à M6. Ces questions ont été convenablement rédigées lorsqu'elles ont été abordées. On peut néanmoins commenter certaines lignes essentielles de code.

**ANALYSE DES RESULTATS ET CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS**

Le jury tient à préciser qu'une bonne maîtrise des notions du cours est une condition préalable à toute réussite d'une épreuve de physique. La conduite des calculs et le tracé des graphes doivent être réalisés avec un minimum de rigueur mathématique. Les fautes d'homogénéité sont souvent rédhibitoires et peuvent être facilement détectées. Enfin négliger la partie informatique est une erreur et le jury invite les étudiants à aborder les deux parties.

Après un traitement mathématique ramenant le barème à 20, la moyenne de l'épreuve s'élève à 9,07 sur 20 avec un écart-type de 4,70.

## CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

### Épreuve de Physique-Modélisation PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**L'usage de calculatrices est autorisé.**

#### **AVERTISSEMENT**

**Les parties A, B, C, D et E d'une part, et les parties F, G et H d'autre part, sont à rédiger sur copies séparées.**

- Les durées indicatives pour chacune des parties sont les suivantes :
  - Première partie (A+B+C) : environ 1h50.
  - Deuxième partie (D+E) : environ 1h30.
  - Troisième partie (F+G+H) : environ 40 minutes.
- Les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques ; les résultats exprimés sans unité ne seront pas comptabilisés.
- Tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème mais ne donnent pas lieu à des questions.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le(s) candidat(e)s.
- Les questions comportant le mot calculer demandent une application numérique.

*Ce problème, qui comporte trois parties indépendantes, s'intéresse au phénomène de marées. La première partie traite du phénomène en lui-même, la seconde décrit la mesure des hauteurs d'eau par un marégraphe à ultrasons et enfin la troisième exploite une base de données.*  
*Les trois parties sont largement indépendantes.*

Données :

- distance Terre Lune :  $d_L = 3,8.10^8 \text{ m}$
- distance Terre Soleil :  $d_S = 1.5.10^{11} \text{ m}$
- rayon de la Terre :  $R_T = 6,4.10^6 \text{ m}$
- masse du Soleil :  $m_S = 2.10^{30} \text{ kg}$
- masse de la Terre :  $m_T = 6.10^{24} \text{ kg}$
- masse de la Lune :  $m_L = 7,3.10^{22} \text{ kg}$
- constante de gravitation universelle :  $G = 6,7.10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$

Lexique :

- pleine mer : hauteur maximale de la marée
- basse mer : hauteur minimale de la marée
- marnage : différence de hauteurs entre une pleine mer et une basse mer consécutives
- vive-eau : marée pendant laquelle le marnage est maximal
- phase de la pleine mer : heure à laquelle la pleine mer est atteinte

**PREMIERE PARTIE**  
**LE PHENOMENE DE MAREES**

**A / NOTIONS QUALITATIVES SUR LES MAREES**

*La carte reproduite dans la figure 1 représente l'évolution de la marée réelle dans la Manche. Les nombres indiqués sous certains ports sont la phase de la pleine mer et le marnage par vive-eau. On trouve deux types de courbes :*

- *Les lignes cotidales (avec une indication en heures) représentent les points dans le même «état de marée» (pleine mer) à un instant donné (les valeurs données correspondent à la date de la pleine mer par rapport à une référence arbitraire).*
- *Les lignes iso-marnage (avec une indication en mètres) représentent les points avec un même marnage (le marnage est la différence de hauteur entre la pleine mer et la basse mer).*

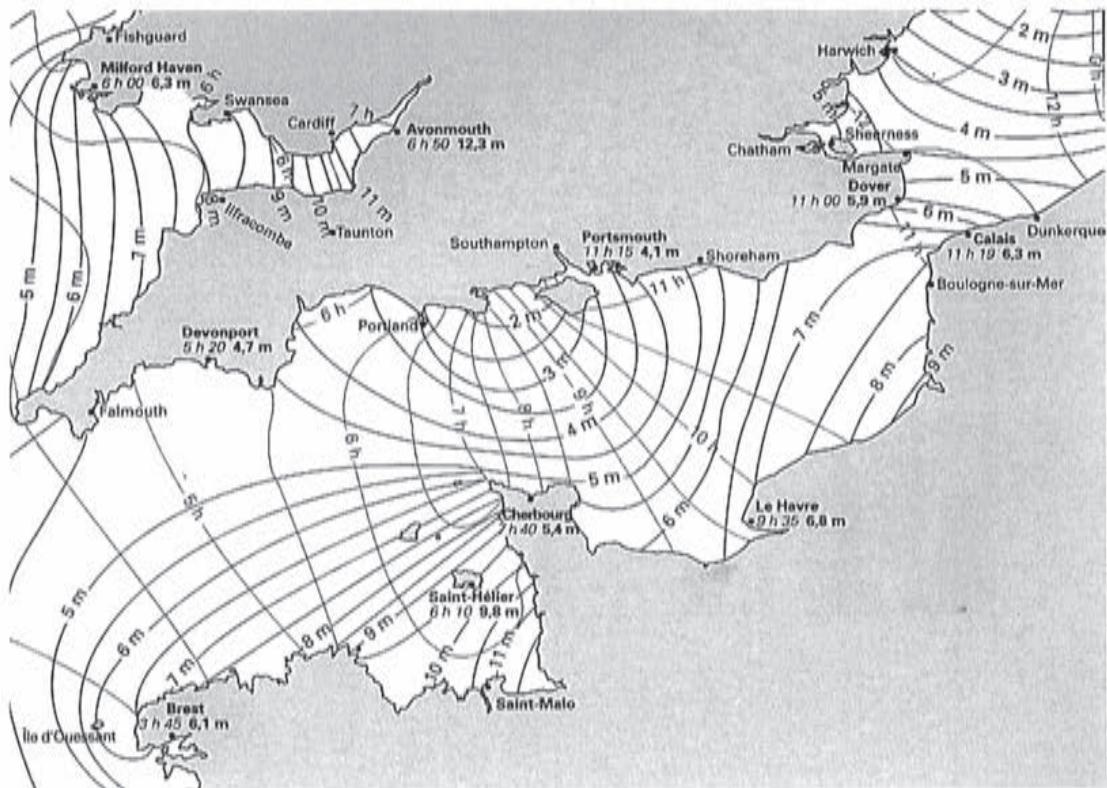


FIGURE 1

- A1.** A quels endroits de la carte les marées sont-elles les plus importantes ? Est-ce dû à une particularité géographique ? On attend une réponse brève.

**A2.** On peut envisager l'évolution spatiale et temporelle de la hauteur d'eau due aux marées comme résultant de la propagation d'une *onde de marée*. Dans quel sens se déplace cette onde de marée dans la Manche ? Une explication basée sur la rotation propre de la Terre est-elle satisfaisante ? Justifier.

**A3.** Donner (sans explication) un ordre de grandeur de la périodicité des marées océaniques. Donner un ordre de grandeur de la vitesse de déplacement de l'onde de marée dans la Manche (à titre de point de repère, la distance entre Saint-Malo et Brest est de l'ordre de 200km). En déduire un ordre de grandeur de la longueur d'onde associée.

**A4.** Dans la Manche la marée est déviée vers les côtes françaises, ce qui a pour conséquence des marnages plus importants que sur les côtes anglaises. Interpréter cette déviation (un schéma clair est attendu).

**A5.** A l'ouest de la ville de Saint-Malo, on distingue sur la carte l'estuaire de la Rance où est implantée une usine marémotrice. Justifier ce choix d'implantation ; pourquoi ne pas avoir fait de même sur l'estuaire de la Seine, au niveau du Havre (Normandie, Seine-Maritime) ?

## B / CHAMP DE MAREE

*Les marées sont dues aux champs de gravitation au niveau de la Terre des différents astres du système solaire, principalement la Lune et le Soleil. On considérera que les astres ont une distribution de masse à symétrie sphérique.*

- B1. Donner sans justification l'expression du champ de gravitation  $\vec{g}_A(M)$  créé par l'astre A, de masse  $m_A$  et de centre  $O$ , en un point  $M$  en dehors de l'astre. On pourra noter  $r = OM$  la distance entre  $O$  et  $M$  et  $\vec{e}_r$  un vecteur unitaire dirigé de  $O$  vers  $M$ .

*On cherche maintenant à établir cette expression.*

- B2. Montrer par des considérations de symétrie que  $\vec{g}_A(M) = g_A(r)\vec{e}_r$ .
- B3. Enoncer le théorème de Gauss dans le cadre de l'électromagnétisme, puis le transposer au cas de la gravitation. Utiliser ce résultat pour retrouver l'expression donnée au B1. Préciser quelle est la simplification dans l'expression du champ de gravitation en dehors de l'astre apportée par la symétrie sphérique de la distribution de masses.

*L'influence d'un astre sur les marées découle d'une petite différence entre la force de gravitation qu'il exerce et la force d'inertie dont il est responsable dans le référentiel géocentrique. On établit ici l'expression du champ de marée en prenant le Soleil comme exemple (dans les trois questions qui suivent, on ne considère que les forces de gravitation dues au soleil), mais le résultat est valable pour n'importe quel astre. Dans toute la suite, on considérera le référentiel héliocentrique ( $R_h$ ) comme galiléen.*

- B4. Décrire le mouvement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique et en déduire l'expression de la force d'inertie d'entrainement sur un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans le référentiel géocentrique. On notera  $\vec{a}_{T/R_h}$  l'accélération de  $T$  (centre de la Terre) dans le référentiel héliocentrique.
- B5. Etablir que  $\vec{a}_{T/R_h} = \vec{g}_S(T)$ , où  $\vec{g}_S(T)$  est le champ de gravitation créé par le Soleil au centre de la Terre  $T$ . La Terre sera supposée avoir une distribution de masse à symétrie sphérique, ce qui fait que la force de gravitation exercée par le Soleil sur la Terre est assimilable au produit de la masse de la Terre par le champ de gravitation du Soleil en son centre.
- B6. En déduire que la résultante de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entrainement dans le référentiel géocentrique dues au Soleil sur un point matériel  $M$  de masse  $m$  s'écrit :

$$m \vec{C}_S(M) \quad \text{avec} \quad \vec{C}_S(M) = -G m_S \left( \frac{\vec{S}\vec{M}}{SM^3} - \frac{\vec{S}\vec{T}}{ST^3} \right)$$

où  $S$  désigne le centre du Soleil,  $m_S$  sa masse, et  $G$  la constante de gravitation universelle.  $\vec{C}_S(M)$  est appelé *champ de marée* du Soleil au point  $M$ .

*Les marées sont essentiellement dues à l'influence de la Lune, celle du Soleil se traduisant par une plus ou moins grande amplitude (marées de vives eaux et de mortes eaux). Dans la suite on ne considère que l'influence de la Lune. Le résultat de la question B6 est transposable à n'importe quel astre, l'expression du champ de marée dû à la Lune est donc (L désignant le centre de la Lune) :*

$$\vec{C}_L(M) = -G m_L \left( \frac{\vec{L}\vec{M}}{LM^3} - \frac{\vec{L}\vec{T}}{LT^3} \right)$$

Sur le schéma de la figure 2 on indique quelques points particuliers à la surface de la Terre, relativement à la position de la Lune.

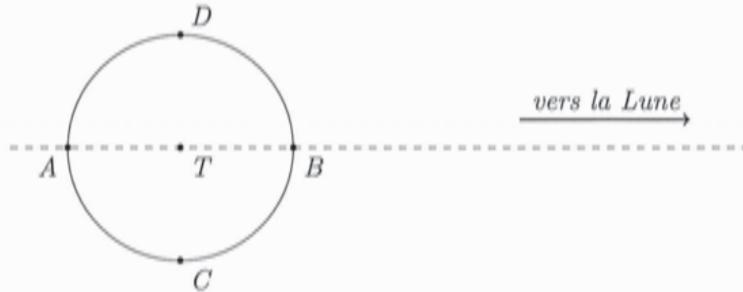


FIGURE 2

- B7. Reprendre le dessin précédent et représenter en A, B, C et D la force gravitationnelle et la force d'inertie dues à la lune, ainsi que leur résultante (proportionnelle au champ de marée).
- B8. Indiquer les points (parmis A, B, C et D) de marée haute et de marée basse. Dans quel plan sont situés tous les points de marée basse ?
- B9. En utilisant la troisième loi de Kepler, donner un ordre de grandeur de la période de révolution de la Lune dans le référentiel géocentrique.
- B10. Donner un ordre de grandeur de la période de rotation propre de la Terre. Conclure sur la périodicité (approximative) des marées.

On cherche à simplifier l'expression du champ de marée, en tenant compte du fait que, pour un point  $M$  à la surface de la terre,  $TM \ll TL$  et en effectuant un développement limité au premier ordre en  $\frac{TM}{TL}$ . On posera  $TM = r$  et  $TL = d_L$ , et on repérera la position de  $M$ , dans le plan contenant  $L$ ,  $T$  et  $M$ , en coordonnées polaires (voir la figure 3).

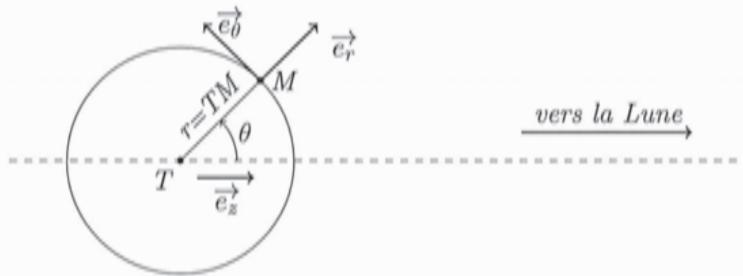


FIGURE 3

- B11. Montrer que  $\overrightarrow{LM} = -d_L \overrightarrow{e_z} + r \overrightarrow{e_r}$ . En déduire que, au premier ordre en  $\frac{r}{d_L}$ , on a  $\frac{1}{LM^3} = \frac{1}{d_L^3} \left(1 + \frac{3r \cos(\theta)}{d_L}\right)$ .
- B12. En déduire que, toujours au premier ordre en  $\frac{r}{d_L}$  :

$$\overrightarrow{C_L}(M) = \frac{G m_L r}{d_L^3} (3 \cos(\theta) \overrightarrow{e_z} - \overrightarrow{e_r})$$

En projetant  $\vec{e}_z$  sur la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , on obtient finalement :

$$\vec{C}_L(M) = \frac{Gm_L r}{d_L^3} \left( (3\cos^2(\theta) - 1) \vec{e}_r - 3\sin(\theta)\cos(\theta) \vec{e}_\theta \right)$$

- B13. Montrer que l'influence de la Lune sur les marées est de l'ordre de 2 fois plus importante que celle du soleil.
- B14. Préciser les positions relatives de la Terre, de la Lune et du Soleil pour les marées de vives eaux (amplitude maximale, les effets de la Lune et du Soleil s'ajoutent) et pour les marées de mortes eaux (amplitude minimale, les effets de la Lune et du Soleil se compensent partiellement). Attention à bien indiquer deux configurations distinctes pour chaque cas. Indiquer le lien avec les phases de la Lune et donner un ordre de grandeur de la périodicité de l'alternance vives-eaux / mortes-eaux.

## C / AMPLITUDE DES MAREES OCEANIQUES

On considère dans cette partie un modèle simple : la Terre est entièrement recouverte d'eau. On obtient ainsi des résultats pertinents pour l'amplitude des marées en haute mer, mais qui n'expliquent pas les phénomènes observés près des côtes. On se place dans le cadre d'un modèle quasi-statique où la forme des océans à un instant donné obéit à la loi de l'hydrostatique ( $p$  désigne la pression et  $\vec{f}_v$  la résultante des forces volumiques) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \vec{f}_v$$

Dans toute cette partie on ne considère que l'influence de la Lune (et pas celle du Soleil). Le marnage, que l'on notera  $\Delta h$ , est la différence de hauteur d'eau entre la marée haute et la marée basse en un endroit donné.

- C1. On commence par une approche dimensionnelle : on considère que, outre le facteur  $\frac{m_L}{d_L^3}$  mis en évidence précédemment, la masse de la Terre  $m_T$  et son rayon  $R_T$  interviennent sur le marnage et on pose :

$$\Delta h = \frac{m_L}{d_L^3} m_T^\alpha R_T^\beta$$

Déterminer les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  pour que  $\Delta h$  ait bien les dimensions d'une longueur et calculer numériquement la valeur de  $\Delta h$  qui en résulte.

- C2. Que traduit la loi de l'hydrostatique ? Quelle est la dimension de ses termes ? Le terme  $\vec{f}_v$  traduit ici l'attraction gravitationnelle due à la Terre, celle due à la Lune ainsi que la force d'inertie d'entrainement dans le référentiel géocentrique due à la Lune. Donner l'expression de  $\vec{f}_v$  en utilisant, pour ce qui est des effets dus à la Lune, le résultat donné dans la partie B. On notera  $\mu$  la masse volumique de l'eau.

On pose  $\vec{f}_v = -\overrightarrow{\text{grad}}(V_T + V_L)$ , où  $V_T$  est l'énergie potentielle volumique associée à l'attraction gravitationnelle de la Terre et  $V_L$  l'énergie potentielle volumique associée aux effets dus à la Lune. On donne l'expression du gradient d'une fonction scalaire  $f$  en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

**C3.** Etablir l'expression de  $V_T$ , en expliquant bien le choix de la constante.

On donne  $V_L = -\mu G \frac{m_L}{d_L} \frac{r^2}{2} (3\cos^2(\theta) - 1)$ . La pression atmosphérique est considérée uniforme à la surface de l'eau, et on néglige les phénomènes de tension superficielle.

**C4.** Montrer que dans ces conditions la surface de l'eau vérifie  $V_T + V_L = cste_1$ , et en déduire que, toujours à la surface de l'eau,  $\frac{m_T}{r} + \frac{m_L}{d_L} \frac{r^2}{2} (3\cos^2(\theta) - 1) = cste_2$

On détermine (en écrivant que, l'eau étant considérée comme incompressible, le volume des océans est le même avec et sans déformation) que la constante introduite précédemment vaut  $\frac{m_T}{R_T}$ .

**C5.** La déformation  $h$  étant petite par rapport à  $R_T$ , on pose  $r = R_T + h$  avec  $\frac{h}{R_T} \ll 1$ . En effectuant les développements limités au premier ordre en  $\frac{h}{R_T}$  adéquats, montrer que :

$$h \left( \frac{m_T}{R_T^2} - \frac{m_L R_T}{d_L^3} (3\cos^2(\theta) - 1) \right) \simeq \frac{m_L R_T^2}{2d_L^3} (3\cos^2(\theta) - 1)$$

Vérifier numériquement que  $\frac{m_L R_T}{d_L^3} \ll \frac{m_T}{R_T^2}$  et simplifier l'expression en conséquence. On utilisera cette expression dans les deux questions suivantes.

*Pour simplifier, on considère que la Lune reste dans le plan équatorial.*

**C6.** Où le marnage  $\Delta h$  est-il le plus important ? Que peut-on dire du marnage aux pôles ?

**C7.** Etablir l'expression du marnage à l'Equateur et faire l'application numérique.

## DEUXIEME PARTIE

### LE MAREGRAPHE A ULTRASONS

*Dans le contexte mondial actuel, mesurer le niveau des mers présente un intérêt certain. Outre les prévisions marégraphiques, l'étude de la hausse du niveau moyen des mers est devenu un sujet sensible. Le marégraphe côtier numérique (MCN) étudié ici fait partie d'un réseau de marégraphes installés sur les côtes françaises. Il est situé à Brest dans l'embouchure de la Penfeld.*

#### D / PUILS DE TRANQUILLITE

*La surface de l'eau en mer ou sur les côtes n'étant pas plane la plupart de temps, il importe de mesurer les variations du niveau de la mer en s'affranchissant des fluctuations de hauteur. C'est le rôle du puits de tranquillité. A l'intérieur du bâtiment (voir schéma de la figure 4), le puits de tranquillité est constitué d'un tube cylindrique vertical où l'eau rentre par le bas et peut monter librement. Les mesures de hauteur d'eau se font dans ce tube de diamètre 1,5 mètre pour le marégraphe de Brest. Même si le bâtiment est fermé, isolé du soleil et des intempéries, la hauteur du puits (plus de 8 mètres) fait que sa température interne n'est pas uniforme. Il faut donc envisager un gradient de température à l'intérieur du puits. On donne dans la figure 4 une vue en coupe du puits de tranquillité ainsi qu'un enregistrement de la température en fonction de l'altitude (les carrés correspondent aux points de mesure).*

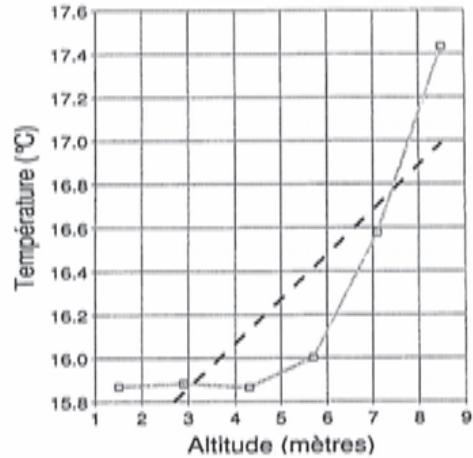
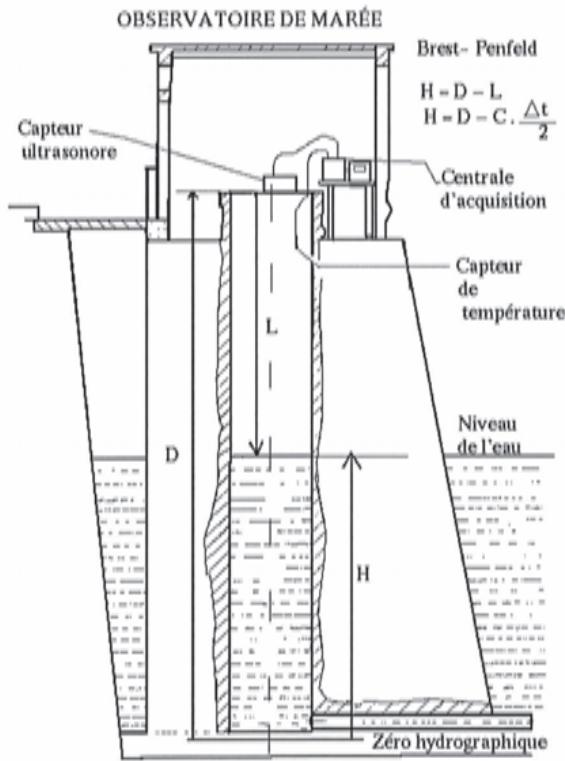


FIGURE 4

D1. Comment peut-on qualifier l'effet du puits de tranquillité sur les variations de hauteur d'eau en termes de filtrage ?

D2. Evaluer numériquement la norme du gradient de température en haut du puits (environ 8,5 m d'altitude).

*Pour rendre compte du gradient de température (dans l'air) qui s'établit dans le puits, on adopte le modèle suivant : Le puits est cylindrique, de rayon  $R_1$  (on note  $s = \pi R_1^2$  sa section) et de hauteur  $L$  (entre le niveau de l'eau et le haut du puits). L'air contenu dans le puits est assimilé à un matériau de masse volumique invariable  $\mu$ , de capacité thermique massique  $c$  et de conductivité thermique  $\lambda$  que l'on considère globalement au repos (on néglige ainsi la convection et la dilatation, ce qui revient à dire que, pour simplifier la modélisation, on raisonne comme si l'air était un solide indilatatable). La température de l'air dans le puits ne dépend que de la profondeur  $z$  (voir figure 5).*

*L'eau impose en  $z = L$  (point  $P$ ) une température  $T_1$  tandis que la partie supérieure impose en  $z = 0$  (point  $O$ ) une température  $T_0$ . Les parois du puits, d'épaisseur  $e$  et de conductivité thermique  $\lambda'$ , sont comprises entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$  (donc  $e = R_2 - R_1$ ) et caractérisées par un coefficient  $r_{th}$  homogène à une résistance thermique multipliée par une longueur et défini par  $R_{th} = r_{th}/\ell$  où  $R_{th}$  est la résistance thermique associée à une longueur  $\ell$  de parois. L'extérieur des parois est à la température de l'eau,  $T_1$ .*

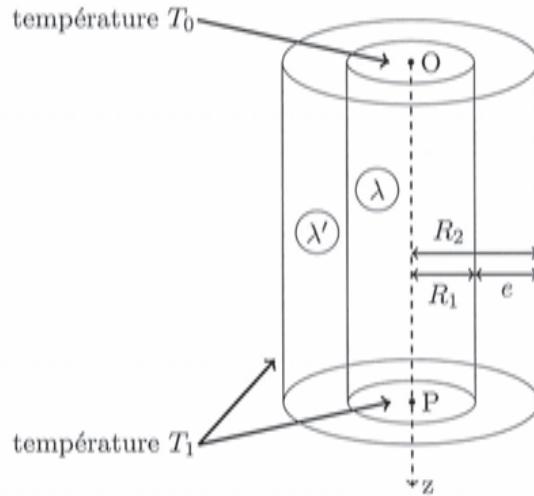


FIGURE 5

D3. On cherche à écrire l'équation de diffusion thermique à une dimension vérifiée par la température à l'intérieur du puits. On considère des évolutions à pression constante. On introduira un terme  $p$  qui représente une puissance par unité de longueur (selon  $(Oz)$ ) et qui traduit les échanges thermiques au travers des parois du puits ( $p$  devant être positive si de l'énergie est effectivement reçue par l'air à l'intérieur du puits). Montrer que l'équation de diffusion thermique se met sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \alpha p$$

Donner les expressions de  $D$  et  $\alpha$  en fonction de  $\mu$ ,  $c$ ,  $\lambda$  et  $s$ .

*On se place en régime stationnaire. Dans un premier temps, on considère qu'il n'y a pas d'échanges thermiques au travers des parois.*

**D4.** Montrer que cette hypothèse implique un gradient de température uniforme.

*On prend maintenant en compte les échanges thermiques au travers des parois (et on est toujours en régime stationnaire).*

**D5.** On propose pour  $r_{th}$  les expressions suivantes :

1.  $\frac{2\pi}{\lambda'} \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right)$
2.  $\frac{2\pi}{\lambda'} (R_2 - R_1)$
3.  $\frac{1}{2\pi\lambda'} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)$
4.  $\frac{\lambda'}{2\pi} \frac{R_2}{R_1}$
5.  $\frac{1}{2\pi\lambda'} \frac{R_1}{R_2 - R_1}$

Déterminer quelle est la bonne expression en expliquant pourquoi les quatre autres ne peuvent être correctes.

**D6.** En partant de l'équation obtenue en [D3](#), compte tenu de l'hypothèse de régime stationnaire, montrer que la température  $T$  à l'intérieur du puits vérifie l'équation :

$$\frac{d^2T}{dz^2} - k^2 T = -k^2 T_1$$

Donner l'expression de  $k$  en fonction de  $\lambda$ ,  $s$  et  $r_{th}$ .

**D7.** Donner la forme des solutions de l'équation différentielle de la question [D6](#) sans chercher à expliciter les constantes d'intégration. On admet ensuite que l'on doit se restreindre à une expression de la forme  $T(z) = Ae^{-kz} + B$ . Donner les expressions de  $A$  et  $B$  en fonction de  $T_1$  et  $T_0$ .

**D8.** Représenter graphiquement  $T$  en fonction de  $z$ . Est-ce qualitativement en accord avec les données expérimentales ?

**D9.** En déduire l'expression du gradient de température dans le puits, commenter son sens et donner en particulier  $\|\overrightarrow{\text{grad}}(T)\| (z = 0)$ .

**D10.** On donne les valeurs numériques suivantes :

- $d = 1,5m$  (diamètre du puits)
- $\lambda = 0,023W.m^{-1}.K^{-1}$  (conductivité thermique de l'air)
- $\lambda' = 1,5W.m^{-1}.K^{-1}$  (conductivité thermique des parois)
- $e = 2m$  (épaisseur des parois)

Calculer numériquement  $r_{th}$ ,  $k$  et  $\|\overrightarrow{\text{grad}}(T)\| (z = 0)$ . Critiquer cette dernière valeur.

## E / TEMPS DE PROPAGATION

*Le marégraphe de Brest est un marégraphe à ultrasons. Au sommet du puits de tranquillité se trouvent deux capteurs gérés par la centrale d'acquisition (voir le schéma en partie D ci-dessus). Un capteur assure l'émission-réception d'ondes ultrasonores de fréquence 41,5 kHz et un autre assure la collecte des températures mesurées par six sondes régulièrement espacées dans le puits.*

A partir de l'intervalle de temps entre l'émission et la réception du signal ultrasonore, on peut déduire le tirant d'air  $L$  puis la hauteur  $H$  d'eau dans le puits. Cela suppose connue la célérité du son dans l'air du puits. Celle-ci est donnée par la formule suivante admise :

$$c = 331,2 \left( 1 + 0,97 \frac{U}{P} + 1,9 \times 10^{-3} T \right)$$

- $c$  est la célérité du son (en  $m.s^{-1}$ ),
- $P$  est la pression atmosphérique en  $hPa$ ,
- $U$  est l'humidité relative de l'air,
- $T$  est la température de l'air en  $^{\circ}C$ .

On pourra utiliser les développements limités (au voisinage de 0) suivants :

$$\ln(1+x) = x + \dots \quad \text{et} \quad e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

**E1.** Pourquoi la fréquence des ondes ultrasonores n'intervient-elle pas dans la formule de la célérité donnée ci-dessus ? Comment évolue la célérité des ondes ultrasonores, pour une température donnée, en fonction de l'humidité de l'air ? Proposer une explication. On rappelle que la célérité  $v$  des ondes sonores dans un gaz parfait est donnée, avec les notations et approximations habituelles, par la relation  $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$  où  $M$  est la masse molaire du gaz parfait.

**E2.** Pourquoi la variation de l'humidité relative est-elle faible dans le puits de tranquillité ?

*Une étude quantitative plus approfondie montre que les variations de pression et les variations relatives de l'humidité de l'air ont peu d'effet sur la célérité des ondes ultrasonores. En revanche, la température reste le paramètre important. Lorsqu'on néglige l'influence de la température, la mesure de la hauteur  $L$  est entachée d'une erreur de près de 2 cm pour un transducteur placé à 10 m au-dessus de l'eau. Il faut donc étudier l'effet d'un gradient de température. On fait les hypothèses suivantes :*

- la célérité de l'onde est indépendante de sa fréquence
- l'expression de la célérité est localement valable sur le chemin de l'onde
- il n'y a pas de réflexion de l'onde ailleurs que sur la surface de l'eau
- on considère que seule la température influence la valeur de la célérité

*La relation entre le temps de parcours  $\Delta t$  du train d'onde et le tirant d'air est alors donnée par :*

$$\Delta t = 2 \int_0^L \frac{dz}{c(z)} \quad \text{avec} \quad c = c_0(1 + aT) \quad \text{où } c_0 \text{ et } a \text{ sont des constantes}$$

**E3.** Expliquer la présence du "2" dans l'expression ci-dessus. Donner l'expression de  $L$  en fonction de  $c_0$ ,  $\Delta t$ ,  $a$  et  $T_0$  en considérant une température uniforme égale à  $T_0$  dans le puits.

*Approximation par un gradient constant : On suppose dans un premier temps le développement au premier ordre suivant de  $T(z)$  :*

$$T(z) = T_0 + Gz$$

$G$  est la valeur du gradient en  $z = 0$  et  $T_0$  la valeur de la température au même niveau ( on choisit le niveau  $z = 0$  pour la plus haute sonde de température dans le puits).

E4. Exprimer l'intégrale permettant de calculer  $\Delta t$  puis en déduire l'expression de  $\Delta t$  en fonction de  $c_0$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $a$  et  $T_0$ .

E5. Montrer que  $L$  est alors donnée par :  $L = \frac{1+aT_0}{aG} (e^{\frac{c_0 a G \Delta t}{2}} - 1)$

E6. Pour simplifier encore, on peut effectuer un développement limité à l'ordre deux de l'exponentielle dans l'expression précédente en supposant le gradient faible. On suppose pour cela l'inégalité :  $L \ll \frac{1}{aG}$ . Trouver la nouvelle expression de  $L$  et montrer que l'on retrouve le résultat de la question E3 plus un terme correctif à expliciter, noté  $\delta L_1$ .

On cherche à tester un autre modèle. On suppose maintenant la forme suivante pour la fonction température :

$$T(z) = T_0 - \Delta T (1 - e^{-\frac{z}{L_0}})$$

- $\Delta T$  est la différence de température entre le haut du puits et la surface de la mer
- $T_0$  est la température du haut du puits
- $L_0$  est la hauteur caractéristique du gradient

E7. Pourquoi cette nouvelle expression de  $T(z)$  semble-t-elle mieux convenir ?

E8. Montrer que la nouvelle expression de  $\Delta t$  est de la forme :

$$\Delta t = B \int_0^L \frac{dz}{A + e^{-\frac{z}{L_0}}}$$

Exprimer les constantes A et B et préciser leur dimension.

Le calcul de l'intégrale de la question E8 permet d'exprimer  $\Delta t$  en fonction de  $L$ , puis d'en déduire  $L$  en fonction de  $\Delta t$ . On met ainsi en évidence un nouveau terme correctif  $\delta L_2$  :

$$L = \frac{c_0 \Delta t}{2} (1 + aT_0) + \delta L_2 \quad \text{avec} \quad \delta L_2 = a \Delta T \left( -L_0 \left( 1 - e^{-\frac{c_0(1+aT_0)-a\Delta T}{2L_0}\Delta t} \right) + \frac{c_0 \Delta t}{2} \right)$$

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $G = 0,21^\circ C.m^{-1}$
- $a = 1,9.10^{-3} ^\circ C^{-1}$
- $c_0 = 331,2 m.s^{-1}$
- $T_0 = 17,42 ^\circ C$
- $\Delta T = 1,55 ^\circ C$
- $\Delta t = 41,95 ms$
- $L_0 = 0,82 m$

E9. A l'aide des données des parties D et E, retrouver les 5 premières valeurs numériques proposées ci-dessus.

E10. Calculer les corrections  $\delta L_1$  et  $\delta L_2$  des deux modèles (gradient linéaire et gradient exponentiel) envisagés. Quel modèle vous paraît le mieux convenir à la situation ?

## TROISIEME PARTIE

### HAUTEURS DE MAREE A BREST

Dans cette partie, on respectera les consignes suivantes :

- lorsque du code est demandé, il doit être écrit en langage Python
- on se limitera aux types suivants : entiers, flottants, chaînes de caractères, listes et tuples
- on se limitera aux mots clés suivants : `if`, `elif`, `else`, `is`, `while`, `for`, `in`, `def`, `return`, `lambda`, `and`, `or`, `not`, `True`, `False` et `None`
- on se limitera aux fonctions et méthodes préprogrammées suivantes : `print`, `input`, `plot`, `range`, `enumerate`, `len` et `append`

### F / BASE DE DONNEES

*Le service hydrographique et océanographique de la marine (shom) dispose de données très complètes sur les hauteurs de marée, certaines remontant à plusieurs siècles. Actuellement les hauteurs sont relevées toutes les minutes sur 63 sites d'observation en France métropolitaine.*

*On envisage ici une base de données simplifiée qui ne contient les données que pour l'année 2013 et pour des hauteurs d'eau relevées toutes les 10 minutes, sur 63 sites dont celui de Brest.*

Table station (extrait)			
id	nom	latitude	longitude
1	DUNKERQUE	51.048	2.366
2	CALAIS	50.969	1.868
3	BOULOGNE-SUR-MER	50.727	1.578
...			
7	SAINT-MALO	48.641	-2.028
8	ROSCOFF	48.718	-3.966
9	LE CONQUET	48.359	-4.781
10	BREST	48.383	-4.495
...			

Table hauteurs (extrait)			
idStation	date	heure	hauteur
10	01/01/2013	00:00:00	2.0
10	01/01/2013	00:10:00	1.995
10	01/01/2013	00:20:00	1.999
10	01/01/2013	00:30:00	2.029
10	01/01/2013	00:40:00	2.105
10	01/01/2013	00:50:00	2.145
...			
10	31/12/2013	23:40:00	3.505
10	31/12/2013	23:50:00	3.687
7	01/01/2013	00:00:00	5.665
7	01/01/2013	00:10:00	5.381
7	01/01/2013	00:20:00	5.072
...			

La table station contient :

- un identifiant propre à chaque site d'observation, de type entier (la numérotation suit l'ordre géographique le long des côtes, en commençant par Dunkerque et en terminant par Monaco)
- le nom du site d'observation, de type chaîne de caractères
- la latitude et la longitude du site, de type flottant

La table hauteurs contient :

- l'identifiant du site d'observation (entier)
- la date et l'heure de la mesure (chaînes de caractères)
- la hauteur d'eau relevée (flottant)

- F1.** Donner un choix de clé primaire possible pour la table station ? Peut-on en définir une pour la table hauteurs ?
- F2.** Combien de lignes contient chacune des tables ?
- F3.** Ecrire en langage SQL les requêtes pour obtenir :
1. la latitude et la longitude de Saint-Malo
  2. les sites d'observation situés à l'ouest du méridien de Greenwich
  3. la hauteur d'eau à Brest le 6 avril 2013 à 14h00

## G / REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

*A partir de la base de données précédente, on peut récupérer dans une liste l'ensemble des hauteurs de marée à Brest pour l'année 2013, accompagnées de la date et de l'heure. On utilise pour cela une variable data qui a la structure d'une liste de listes, chaque sous-liste correspondant à un triplet [date,heure,hauteur]. Pour illustrer les choses, voici le début de data :*

```
[[{'01/01/2013', '00:00:00', 2.0},
{'01/01/2013', '00:10:00', 1.995},
{'01/01/2013', '00:20:00', 1.999},
{'01/01/2013', '00:30:00', 2.029},
{'01/01/2013', '00:40:00', 2.105}, ...]]
```

*Dans cette partie on va exploiter data dans le but d'obtenir les représentations graphiques suivantes (figure 6) :*

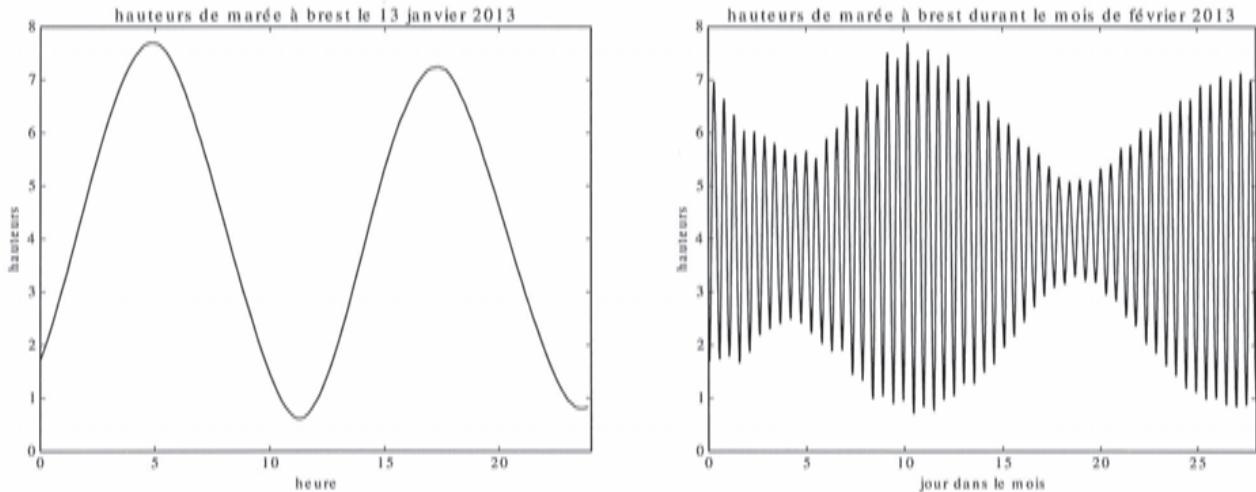


FIGURE 6

- G1. Que renvoie data[2][1] ?
- G2. Ecrire le code Python permettant de récupérer la liste des hauteurs (et uniquement les hauteurs) dans une variable (de type liste) height.
- G3. Écrire le code Python destiné à récupérer les extraits de height nécessaires pour construire les deux représentations graphiques présentées ci-dessus (on les nommera respectivement h\_jan13 et h\_fev).
- G4. Écrire le code Python permettant de créer une liste de flottants dates1 contenant le même nombre d'éléments que h\_jan13 et qui contient les instants correspondant aux différentes hauteurs, exprimés en heures. Faire de même en créant une liste de flottants dates2 associée à h\_fev en exprimant les instants en jours. Comment obtenir, à partir des différentes listes créées, les représentations graphiques de la figure 6 en utilisant la fonction plot du module matplotlib (on ne se préoccupera pas de l'importation de ce module, ni des légendes) ?

## H / PERIODE ET AMPLITUDE DES MAREES

On se propose dans cette partie d'extraire de la liste `height` diverses informations, le but final étant d'obtenir la période moyenne des variations de hauteur ainsi qu'une liste de leurs amplitudes (l'amplitude de la marée, égale à la différence de hauteur entre une pleine mer et une basse mer successives, est aussi appelée marnage).

- H1.** Ecrire une fonction `minimum` qui prend en argument une liste de nombres et qui renvoie la plus petite valeur contenue dans la liste. Décrire son fonctionnement (préciser les valeurs successives prises par la (les) variable(s) interne(s) à la fonction) sur l'entrée [5,6,3,4,3,8].
- H2.** Modifier cette fonction (en une fonction que l'on appellera `min2`) pour qu'elle renvoie la position dans la liste de la plus petite valeur. Comment utiliser cette nouvelle fonction, avec les listes `data` et `height` pour obtenir le jour et l'heure de la plus petite hauteur d'eau à Brest lors de l'année 2013 ?
- H3.** Écrire une fonction `moyenne` qui prend en argument une liste de nombres et renvoie la moyenne de ses éléments.
- H4.** On propose la fonction «inconnue» suivante :

```
def fonction(liste) :

    m = moyenne(liste)
    e = (m-minimum(liste))/10

    val = []
    i = 0
    while i < len(liste) :
        if liste[i] > m-e and liste[i] < m+e :
            a = i
            while liste[i] > m-e and liste[i] < m+e :
                i += 1
            b = i-1
            val.append((a+b)/2)
            i += 1

    s = 0
    n = len(val)
    for i in range(n-1) :
        s += val[i+1]-val[i]

    return 2*s/(n-1)
```

Expliquer son fonctionnement. Que renvoie-t-elle appliquée à `height` ?

- H5.** Écrire une fonction qui permette d'obtenir la liste des amplitudes (marnages) à partir de la liste `height`. On pourra utiliser les fonctions précédentes, ainsi qu'une fonction `maximum` qui prend en arguments une liste de nombres et renvoie la plus grande valeur.

On obtient à partir de cette liste la seconde courbe de la figure 7 (pour les trois premiers mois de l'année), à comparer avec la courbe des hauteurs de marée de la même figure.

La figure 7 est destinée à illustrer ce qui précède, et ne donne lieu à aucune question.

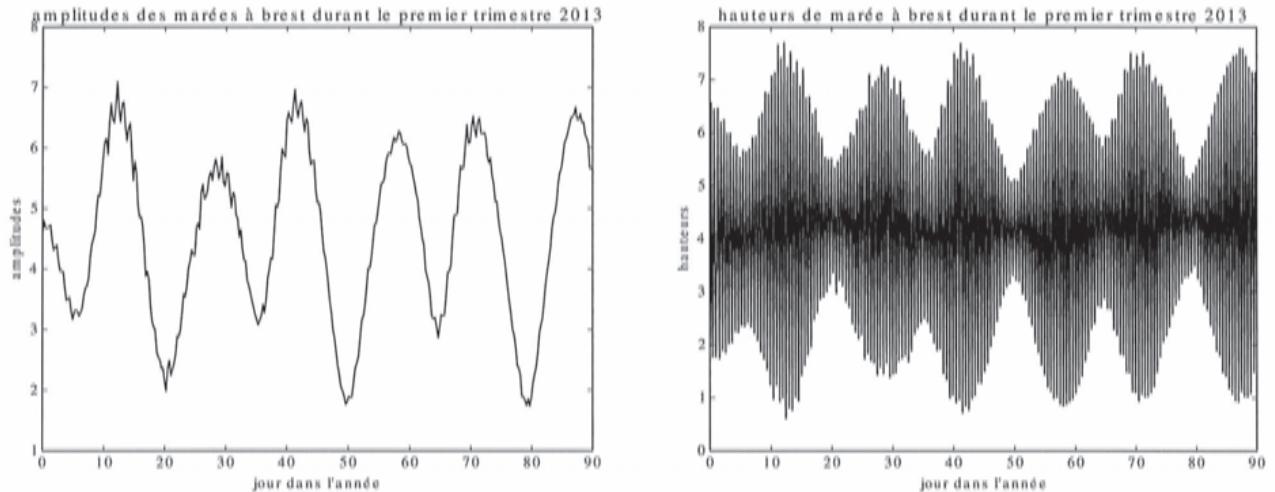


FIGURE 7

Fin de l'épreuve...

## Rapport sur l'épreuve de Mathématiques PC2 (problème)

---

### Présentation du sujet

L'épreuve consiste en un problème pour une durée de 3 heures. Ce problème était construit autour du développement en série de la fonction tangente et l'expression de ses coefficients en fonction des nombres de Bernoulli : La partie I permettait de justifier le développement en série de la fonction tangente sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . La partie II permettait de définir les nombres de Bernoulli comme les coefficients constants des polynômes de Bernoulli. La partie III menait vers la relation entre les nombres de Bernoulli et les coefficients du développement en série de la fonction tangente.

### Commentaire général de l'épreuve et Analyse générale

Le sujet se voulait progressif en difficulté. La partie IA était centrée sur la fonction tangente et ses dérivées dans le but de préciser le développement de Taylor-Laplace de la fonction tangente. Cette partie s'est avérée difficile néanmoins pour de nombreux candidats : méconnaissance de la fonction tangente, démonstrations par récurrence incorrectement formulées, difficultés pour dériver une fonction composée. La partie IB plus abstraite a été peu abordée. La manipulation et l'interprétation des inégalités sont trop souvent peu maîtrisées. La partie II plus calculatoire a été mieux réussie. Le programme quand il est abordé est le plus souvent correct, mais les candidats ne s'interrogent pas suffisamment sur son efficacité. Le calcul des coefficients binomiaux est, même juste, très souvent extrêmement coûteux, avec des calculs de factorielles inutiles, parfois indépendamment récursives. La dernière partie n'a quasiment pas été abordée. Signalons une erreur de typographie dans la question III2,  $T(0)$  vaut  $-i$ .

### Analyse des résultats

L'épreuve a été traitée par 2266 candidats. Les notes sont étalées entre 0 et 20 avec une moyenne de 9.75 et un écart-type 4.49. Les correcteurs ont remarqué de très bonnes copies mais ils ont l'impression que le nombre de très mauvaises copies a augmenté, par rapport aux années précédentes. Ils ont aussi remarqué des démonstrations par récurrence incorrectement formulées plus fréquentes. De fait, les questions élémentaires et la connaissance du cours permettent de classer significativement les copies. La présentation des copies est majoritairement satisfaisante.

### Conseil aux futurs candidats

- Prenez votre temps, lisez l'énoncé. Réfléchissez à la cohérence du sujet.
- Ne négligez pas les questions élémentaires et les questions de cours. Si on vous demande un énoncé de théorème, il s'agit d'une question de cours et il faut énoncer le théorème. Si de plus, il faut l'appliquer dans une certaine situation, il faut alors vérifier que les hypothèses de l'énoncé sont avérées dans cette situation.
- La représentation du graphe d'une fonction doit être précise. On doit pouvoir lire sur le dessin les réponses aux questions usuelles (comportement à l'infini, éventuelles asymptotes, tangentes aux points remarquables, concavité).
- Soignez vos démonstrations, La précision et la rigueur sont des compétences appréciées dans cette épreuve.
- Un programme doit être correct, c'est-à-dire donner la bonne réponse, mais aussi être efficace. La complexité (même approximative) de votre programme doit faire partie de vos considérations.

## **EPREUVE DE PHYSIQUE-MODELISATION**

Durée : 4 heures

### **PRESENTATION DU SUJET**

L'épreuve durait 4 heures et comportait deux parties de physique et une de modélisation; les différentes parties étaient indépendantes et pouvaient donc être traitées séparément.

La première partie concernait le phénomène de marées et comportait 3 sous parties A, B et C. La seconde partie portait sur une étude du marégraphe de Brest avec 2 sous parties D et E. Enfin la dernière (sous parties F, G et H) abordait quelques aspects informatiques au travers de l'évolution de la hauteur d'eau à Brest au cours de l'année 2013.

### **COMMENTAIRE GENERAL SUR L'EPREUVE**

Dans l'ensemble, les différentes parties de physique et de modélisation ont été abordées. De nombreux résultats intermédiaires donnés dans l'énoncé permettaient aux candidats de progresser dans l'épreuve avec des points de repères. De nombreuses applications numériques permettaient de quantifier les résultats et de tester les candidats sur leur sens physique et leur esprit critique. L'épreuve demandait également à plusieurs occasions d'exploiter certaines données dans le texte de l'énoncé, et ce de manière quantitative.

Le jury rappelle qu'une certaine honnêteté de la part des candidats est requise dans les réponses attendues par les correcteurs : Il est inutile d'essayer de « noyer le poisson » pour retrouver un résultat donné dans l'énoncé en passant par des étapes « mathématiques » fausses. Il faut également insister sur le fait qu'un minimum de clarté et de soin dans la rédaction est attendu ; de longs calculs qui n'aboutissent pas sans aucune indication sur ce qui est entrepris ne rapportent aucun point.

L'épreuve ne comportait pas de difficultés de calculs, les résultats étant souvent donnés. Cependant, beaucoup d'erreurs ont été constatées pour de simples intégrales et de grosses lacunes pour faire des calculs élémentaires.

### **ANALYSE PAR PARTIE**

#### **PREMIERE PARTIE : LE PHENOMENE DE MAREES**

##### **Partie A : Notions qualitatives sur les marées**

Cette partie mobilisait essentiellement les compétences « S'approprier et Analyser ». Une carte des marées en Manche était proposée. Elle demandait des qualités d'observation, du bon sens et a été assez bien traitée dans l'ensemble du point de vue de l'observation. Les interprétations et explications ont en revanche donné lieu à des réponses moins satisfaisantes souvent farfelues, peu rigoureuses et finalement sans réel rapport avec la question posée. C'est par exemple le cas de la question A4, qui faisait qualitativement appel à la notion de force de Coriolis et n'a été correctement traitée que très rarement. Le jury peut regretter également l'absence de commentaires lorsque l'estimation de la valeur de la longueur d'onde a abouti à une absurdité. Un futur ingénieur doit apporter un regard critique sur les résultats de sa modélisation.

## Partie B : Champ de marée

Cette partie demandait une bonne connaissance du cours de mécanique et concernait principalement les notions de champ de gravitation et de référentiels.

Un certain nombre de candidats se montre incohérent dans leur analyse avec des résultats contradictoires et des expressions manifestement non homogènes. Le jury regrette également la malhonnêteté intellectuelle dont certains ont fait preuve comme des calculs faux qui menaient au bon résultat. Ce comportement a été sévèrement sanctionné.

B1 : Si de nombreux candidats ont su donner correctement l'expression du champ de gravitation, ce n'est pas le cas d'environ 25% des copies.

B2 : Assez bien traitée, il y a malgré tout de nombreuses réponses erronées (invariance par translation pour une distribution à symétrie sphérique).

B3 : Assez bien traitée, cependant le passage du théorème de Gauss de l'électromagnétisme à celui de la gravitation a donné lieu à des confusions.

B4 : De nombreux candidats n'identifient pas correctement le mouvement de translation.

B5 : Bien traitée dans l'ensemble.

B6 : Dans leur justification du résultat donné, beaucoup de candidats attribuent l'expression de la force de gravitation à la force d'inertie et vice versa.

B7 : La direction de la force de gravitation due à la Lune est souvent dirigée vers le centre de la Terre, la force d'inertie a rarement le bon sens (et varie parfois d'un point à l'autre) ce qui rend la conclusion complexe.

B8 : Trop peu de candidats répondent à cette question en s'appuyant sur les résultats de la précédente ; un certain nombre connaissaient visiblement le résultat.

B9 : La troisième loi de Kepler, très souvent connue, donne parfois lieu à des confusions sur la nature du centre attracteur et de sa masse.

B10 : Là encore, la réponse est rarement étayée en partant des questions précédentes.

B11 : Très rarement bien traitée, donne lieu à des expressions mathématiques sans aucun sens, les candidats voulant, par tous les moyens possibles, « retomber » sur l'expression proposée dans l'énoncé (le jury conseille vivement d'apprendre à exprimer la norme d'un vecteur en calculant le carré scalaire).

B12 : Les calculs ne sont le plus souvent pas expliqués, ce qui ne permet pas d'attribuer la totalité des points.

B13 : L'application numérique est souvent faite, il aurait été intéressant de mettre en évidence le fait que l'influence d'un astre est fonction d'un quotient entre la masse et la distance au cube.

B14 : Question plutôt bien réussie en ce qui concerne les schémas « vives eaux » / « mortes eaux » ; la périodicité de cette alternance est plus rarement bien traitée.