

Exercice 1

Étudier la limite, lorsque n tends vers ∞ , des suites suivantes.

- 1) $u_n = n$; 2) $u_n = 1$; 3) $u_n = 3^n$; 4) $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$; 5) $u_n = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{2n^2}{n^2 + 1}$

Exercice 2

Déterminer la limite de $\frac{(-1)^n}{n}$, en rédigeant de façon détaillée la démonstration (revenir à la définition de la limite d'une suite).

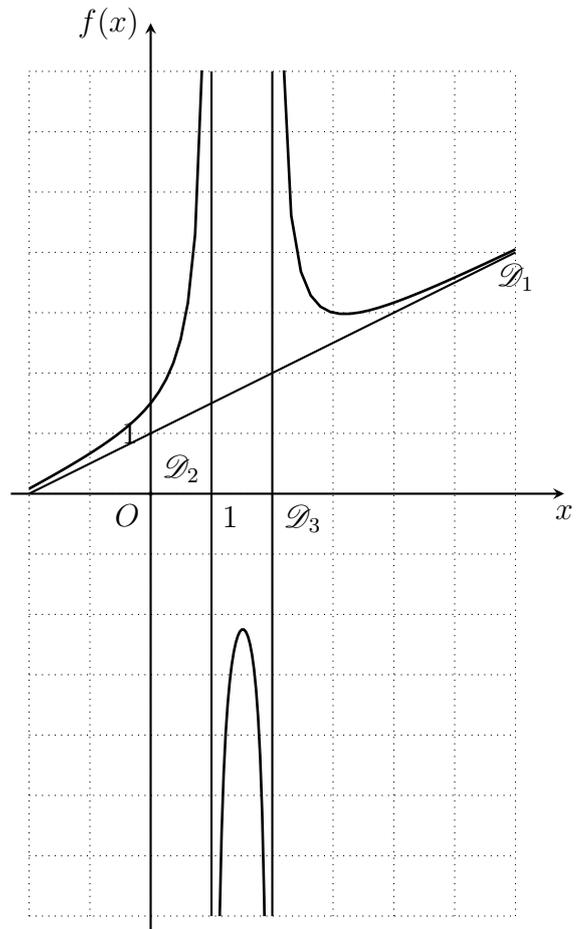
Exercice 3

La courbe ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1; 2\}$.

- 1) Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
- 2) Dresser le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f .
- 3) Donner les équations des droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 , asymptotes de la courbe représentative de la fonction f .
- 4) Sachant que f est une fonction de la forme

$$f(x) = ax + b - \frac{1}{(x - c)(x - d)}$$

déterminer a , b , c et d . Justifier.



Exercice 4

Soit $f(x) = \frac{-2x^2 - 3x + 5}{x + 2}$

- 1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
- 2) Étudier la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition.
- 3) Déterminer les réels a , b , c tels que, pour tout $x \neq -2$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$$

- 4) Donner une équation des asymptotes éventuelles, justifier.
- 5) Pour tout $x \neq -2$, étudier le signe de $f(x) + 2x - 1$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 6) Dresser le tableau de variations de f .
- 7) Montrer que le point $I(-2; 5)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f .

Exercice 5

Étudier la limite, lorsque x tends vers $+\infty$ et $-\infty$, des fonctions suivantes.

1) $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{-x^2 + 3x - 2}$;

2) $f(x) = \frac{1 - 4x^2}{x^2}$;

3) $f(x) = \frac{2x - 3}{(x + 1)(x - 2)}$;

4) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - x}$;

5) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - 2x$;

Pour les questions 4 et 5, on pourra utiliser la *quantité conjuguée*.

Exercice 6

Déterminer le domaine de définition des fonctions de l'exercice 5.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$.

1) Démontrer que, pour tout réel $x \neq 0$, on a $-\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$.

2) En déduire la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x + \sin(x)}{x - 1}$.

1) Trouver un encadrement de la fonction f sur $]1; +\infty[$.

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) Soit f la fonction définie sur $[1/5; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{5x - 1} - 2}{x - 1}$.

Exercice 10

Donner des exemples de fonctions f et g telles que

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = 1$, (remarque : on peut remplacer 1 par un nombre réel arbitraire).

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x)$ n'existe pas.

Exercice 11 (Vrai / Faux)

Pour chaque affirmation, on demande une justification (contre-exemple ou preuve). Il peut être utile, pour aider à la réflexion, de chercher des exemples graphiquement. Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$.

1) Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2) Si f est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f n'est pas majorée.

4) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe au moins un intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$, sur lequel f est croissante.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Est-ce que l'équation $f(x) = 0$ a une solution ?

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ayant le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-5	0	1	3	10	$+\infty$
f	1		3		3		$+\infty$
		-5		-10		2	

Quel est le nombre de solution de l'équation $f(x) = 1$ sur \mathbb{R} ?

Exercice 14

Résoudre de façon approchée à 10^{-2} l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ sur \mathbb{R} .