Produit scalaire dans l'espace

Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ orthonormal de l'espace.

Introduction

Les objets classiques de la géométrie dans l'espace :

Droite	Plan
2 points A et B *distincts*	3 points A, B et C *non alignés*
1 point A et 1 vecteur $\overrightarrow{u}$ *non nul*	1 point A et 2 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ *non colinéaires*

Définition 1 (produit scalaire) Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le

Exemple 1 **1)** Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} =$

2) Soit $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} =$

I) Norme d'un vecteur et orthogonalité

1) Norme d'un vecteur

Définition 2 Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur et M un point tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est le

Exemple 2 Avec les vecteurs de l'exemple 1, $\|\overrightarrow{u}\| =$
$\|\overrightarrow{v}\| =$

Application 1 (équation d'une sphère) Déterminons l'équation de la sphère $S(A, R)$ de centre $A(x_A, y_A, z_A)$ et de rayon $R \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 3 Cas particulier de $S(O, 1)$, sphère de centre O et de rayon 1 :

2) Orthogonalité

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ deux vecteurs et A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$

Par Pythagore,
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\iff$

$\iff$

$\iff$

Le produit scalaire apparaît donc naturellement.

Remarque 1 Le produit scalaire est présent dès que l'on parle

-
- .

II) Le produit scalaire

1) Orthogonalité de deux vecteurs

Propriété 1 Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

Exemple 4 Avec les vecteurs de l'exemple 1,

Exemple 5 Soit $A(1;2;3)$, $B(2;2;5)$ et $C(-1;5;4)$.

1) Montrer que ABC est rectangle en A.

2) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Propriétés algébriques

Propriété 2 (produit scalaire)

1) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$,

2) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}$,

3) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et tout $k \in \mathbb{R}$,

4) Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$,

Démonstration. À faire en exercice. □

Exemple 6 Avec les vecteurs de l'exemple 1, $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) =$

Propriété 3 (norme)

1) Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$,

2) Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout $k \in \mathbb{R}$,

3) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$,

Démonstration. Seuls les points 2 et 3 sont à démontrer. À faire en exercice, en utilisant la propriété précédente. □

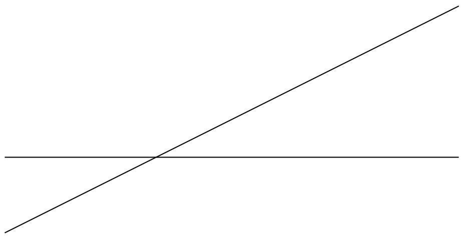
Conséquence 1 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors

$$\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \\ -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \end{cases}$$

Démonstration. □

3) Autres expressions du produit scalaire

On considère trois points distincts, A, B et C de l'espace.
On note H le projeté orthogonal de C sur (AB).



Exercice 1 Reprendre les données de l'exemple 5 et calculer la valeur arrondie au degré près de $\widehat{B}$.

III) Plans et orthogonalité

1) Vecteur normal à un plan de l'espace

Définition 3 Une droite $\mathscr{D}$ est dite *orthogonale* à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si, pour tout $A, A' \in \mathscr{D}$, pour tout $B, B' \in \mathscr{P}$,

$$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BB'} = 0$$

Définition 4 (vecteur normal) Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. On dit que $\overrightarrow{n}$ est *normal* à $\mathscr{P}$ si et seulement si toute droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

Propriété 4

Exemple 7 Soit $A(1; 2; 3)$, $B(2; 2; 5)$ et $C(-1; 5; 4)$ les trois points de l'exemple 5, donner un vecteur normal au plan (ABC).

Définition 5 (projeté orthogonal) Soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et A un point. Supposons $A \notin \mathscr{P}$ et posons $\mathscr{D} =< A, \overrightarrow{n} >$ la droite engendré par A et le vecteur $\overrightarrow{n}$. Alors le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ est $H = \mathscr{D} \cap \mathscr{P}$.

Remarque 2 Si $A \in \mathscr{P}$, alors le projeté de A dans $\mathscr{P}$ est lui-même.

2) Équation cartésienne d'un plan de l'espace

Propriété 5 Soit $\mathscr{P}$ un plan.

1) Si le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est de la forme $ax + by + cz = d$ où $d \in \mathbb{R}$ fixé.

2) Réciproquement, si a, b, c et d sont quatre réels fixés tels que $ax+by+cz+d = 0$ soit l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, alors $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$.

Démonstration.

1)

2)

$\square$

Exemple 8 Avec les données de l'exemple 5, déterminer une équation du plan (ABC). À faire pour mardi.

3) Distance d'un point à un plan

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.

Exemple 9 Calculer la distance entre $\mathscr{P}$ d'équation $12x + 10y - 6z - 14 = 0$ et le point $O(0;0;0)$.

Définition 6 (plan médiateur) Soit A et B deux points distincts de l'espace et soit M le milieu du segment $[AB]$. Le plan médiateur de $[AB]$ est le plan perpendiculaire à (AB) passant par M.

Cette définition rappelle la définition, en géométrie plane, de

Exemple 10 Déterminer une équation du plan médiateur de $[AB]$ avec $A(0;1;1)$ et $B(4;1;5)$.

Propriété 6 Soit A et B deux points distincts de l'espace.

4) Position relative de deux plans

Propriété 7 (parallélisme)

1)
2)

Exemple 11

Propriété 8 (orthogonalité)

Exemple 12 Avec les mêmes notations qu'à l'exercice précédent,

5) Demi-espace