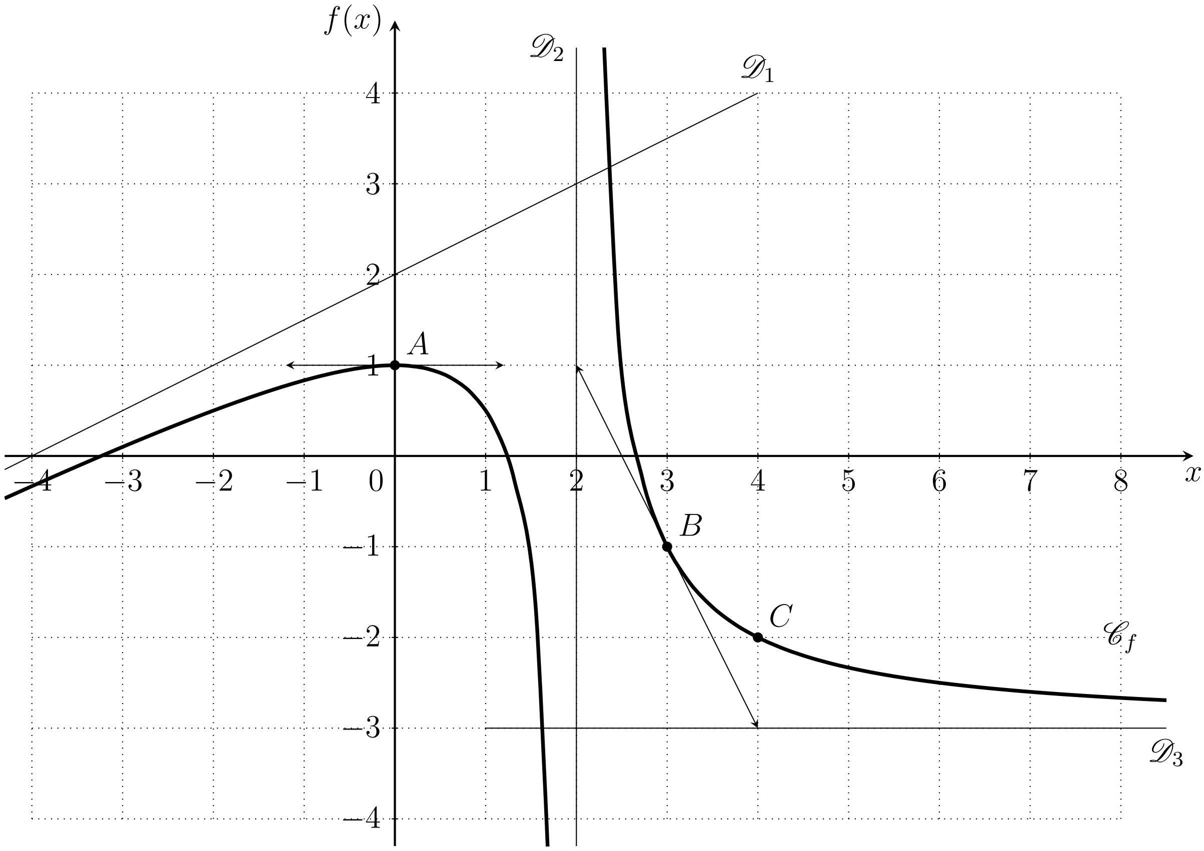
Contrôle de Mathématiques

Exercice 1 (lectures graphiques)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, que l'on a représenté graphiquement ci-dessous. Les points $A(0,1)$, $B(3,-1)$ et $C(4,-2)$ appartiennent à la courbe.



1) Lire graphiquement le tableau de variation de la fonction f.

2) Lire graphiquement le tableau de signes de la fonction dérivée f'.

3) Lire graphiquement une équation de la tangente en $x = 3$.

4) Lire graphiquement une équation de l'asymptote oblique.

5) Lire graphiquement une équation de chacune des deux autres asymptotes, en précisant en quel voisinage elles sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.

6) On pose $g(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre dérivé en 0 de $f \circ g$.

Exercice 2
Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$$

1) Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3) Démontrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Exercice 3

1) Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

a. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution, que l'on note α. Donner un encadrement de largeur 10^{-2} de α.

c. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie pour tout $x \in]1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$$

a. i. Démontrer que le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$.

ii. En déduire le sens de variation de f sur $]1; +\infty[$.

iii. En utilisant la définition de α, démontrer que $f(\alpha) = 3\alpha$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

b. i. Démontrer que, pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$f(x) = 2x + \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$$

ii. En déduire que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe représentant f et étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette asymptote.

iii. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet une autre asymptote.