Exercices : Suites numériques (suite)

Exercice 4 (La Réunion, juin 2005)

Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1 500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Pour tout entier naturel n, on appelle u_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année $(2005+n)$.

1) **a.** Calculer u_0, u_1 et u_2. La suite u de terme général u_n est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier les réponses.

b. Expliquer ensuite pourquoi on a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100$.

2) Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 1\,000$.

a. Démontrer que la suite v de terme général v_n est géométrique. Préciser sa raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times 0{,}9^n + 1\,000$.

c. Déterminer la limite de la suite u.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0{,}9^n$.
En déduire le sens de variation de la suite u.

4) Au 1er janvier 2005, l'entreprise compte un sur-effectif de 300 employés. À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera -t-elle plus en sur-effectif ?

Exercice 5 (France métropolitaine, juin 2001)

Un club de sport propose deux types d'abonnement non permutables.
Formule A : une cotisation annuelle de 500 F à laquelle s'ajoute la première année seulement un droit d'entrée de 10 000 F.
Formule B : une cotisation annuelle initiale de 1 000 F qui augmente de 10 % par an. Dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 50 F sur la cotisation annuelle. Si C_n, est le montant, exprimé en francs, de la cotisation annuelle la n-ième année, on a $C_1 = 1\,000$, et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $C_{n+1} = 1{,}1C_n - 50$.

1) Déterminer la somme T_n versée au club de sport par membre pendant n années avec la formule A.

2) Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $D_n = C_n + \alpha$ où α est un réel.
Déterminer le réel α pour que la suite (D_n) soit une suite géométrique de raison 1,1 et préciser le terme initial de la suite.

3) On suppose dans cette question que $\alpha = -500$.

a. Exprimer D_n puis C_n en fonction de n.

b. Soit S_n la somme versée au club par un membre pendant n années avec la formule B.
Montrer que $S_n = 5\,000\,[(1{,}1)^n - 1] + 500n$.

c. Quel nombre minimum d'années un membre doit-il cotiser pour que la formule A soit plus avantageuse que la formule B ?

Exercice 6 (La Réunion, juin 2006)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 & = & 12 \text{ et} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}u_n + 5 \quad \text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1) Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{3}x + 5$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n).
(*Cette construction est à faire sur le graphique de l'annexe* 3 - *exercice* 3 - *Spécialité*)
Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?

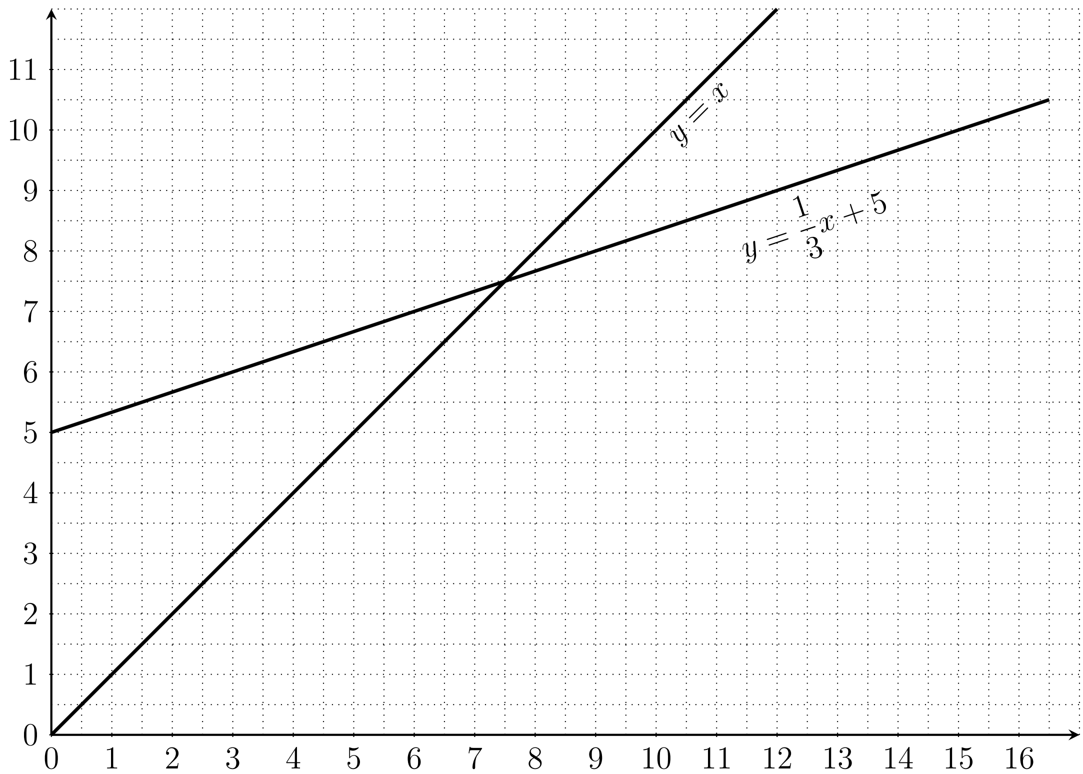
2) Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par : $v_n = u_n - \frac{15}{2}$.

- **a.** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
- **b.** Exprimer alors v_n en fonction de n.
- **c.** Déterminer la limite de la suite (v_n) puis en déduire la limite de la suite (u_n).

3) Est-il possible de déterminer n de sorte que :

- **a.** $u_n - \frac{15}{2} \leqslant 10^{-6}$?
- **b.** $u_n - \frac{15}{2} \geqslant 10^{6}$?

Annexe 3 - exercice 3 - Spécialité.



Exercice 7
Complétez les suites suivantes. On suppose que ces suites sont de la forme $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$

1) $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

2) $11, 14, 17, 20, \ldots$

3) $6, 12, 24, 48, \ldots$

4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$