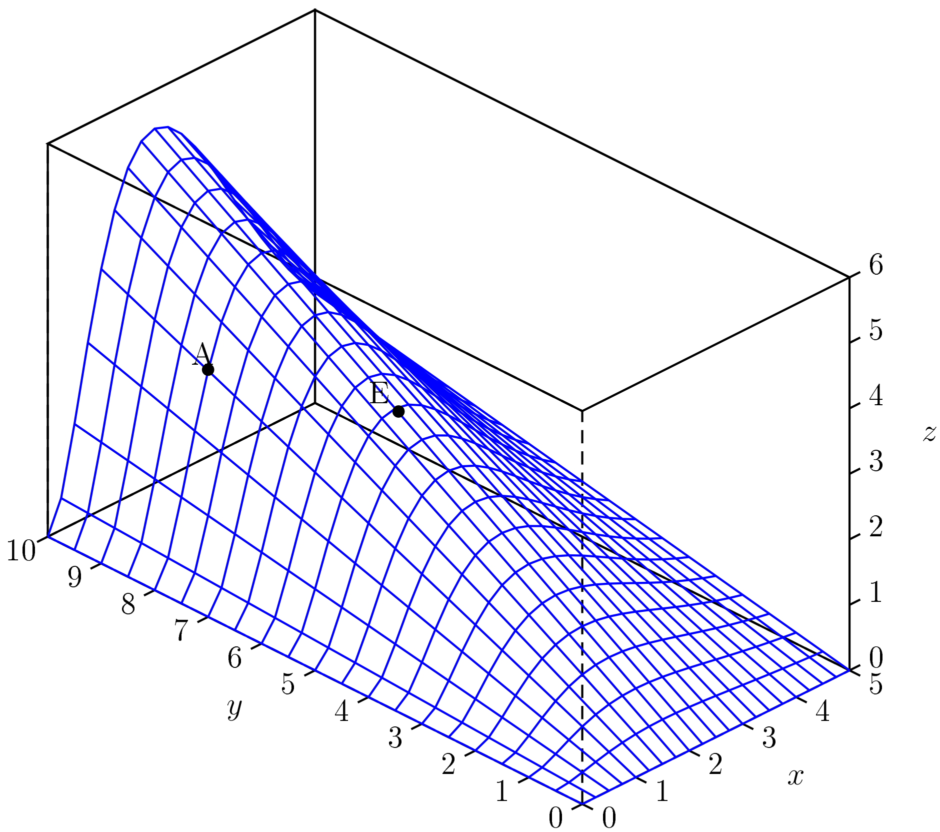
Exercices de géométrie dans l'espace

Exercice 1 (Nouvelle-Calédonie, novembre 2005)
Le bénéfice B d'une entreprise dépend à la fois des investissements et de la production.
On appelle x le montant des investissements en millions d'euros et y la quantité produite en milliers d'unités. On admet que le bénéfice B de cette entreprise, exprimé en millions d'euros, est modélisé par la fonction B définie par $B(x\ ;\ y) = x^2y\mathrm{e}^{-x}$.
Voici une vue de la surface (S) d' équation $z = x^2y\mathrm{e}^{-x}$, avec x élément de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ et y élément de l'intervalle $[0\ ;\ 10]$, dans un repère orthogonal de l'espace.



1) Déterminer par lecture graphique le montant des investissements et la valeur de la production qui permettent d'obtenir un bénéfice maximal quand x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ et y appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 10]$. Calculer la valeur correspondante de ce bénéfice.

2) **a.** Sur la figure ci-dessus, on a placé le point A appartenant à la surface (S), ayant pour abscisse $x_A = 1$ et pour ordonnée $y_A = 8$. Calculer la troisième coordonnée z_A du point A.

b. Sur la figure ci-dessus, on a placé le point E appartenant à la surface (S), ayant pour abscisse $x_E = 2$ et pour troisième coordonnée $z_E = z_A$. Calculer la valeur exacte y_E de l'ordonnée du point E.

3) Quelle est la nature de l'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $x = 1$? Justifier. Tracer cette intersection dans un plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm, y appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 10]$. Déterminer, à l'euro près, le montant en euros du bénéfice maximal réalisé par l'entreprise quand le montant des investissements est fixé à 1 million d'euros.

4) D éterminer une équation de la courbe d'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $y = 10$. Expliquer alors comment retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 2 (Polynésie juin 2007)
Une entreprise fabrique des savons et des bougies parfumées en quantités respectives x et y exprimées en tonnes.

Le coût total de production z, exprimé en milliers d'euros, est donné par la relation $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$ avec $x \in [0\ ;\ 6]$ et $y \in [0\ ;\ 8]$.

1) La surface $\mathcal{S}$ représentant le coût en fonction de x et y dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est donnée sur la feuille distribuée au cours précédent.

a. Le point A$(3\,;\,2\,;\,3)$ appartient-il à la surface $\mathcal{S}$? Justifier.

b. Placer sur la surface le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 2 qui appartient à $\mathcal{S}$.

c. Soit $y = 2$. Exprimer alors z sous la forme $z = f\,(x)$ puis donner la nature de la section de la surface $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y = 2$ en justifiant.

2) La fabrication de x tonnes de savons et de y tonnes des bougies parfumées engendre la contrainte $x + y = 5$.

a. Quelle est la nature de l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$?

b. Vérifier que, sous la contrainte $x + y = 5$, z peut s'écrire sous la forme $z = g\,(x)$ avec $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$.

c. Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum puis la valeur de y et le coût de production z qui correspondent. On note C le point de la surface $\mathcal{S}$ qui correspond à ce coût minimum.

d. On donne, sur la feuille annexe 1, figure 2 (seconde figure distribuée pendant le cours), la projection orthogonale de la surface $\mathcal{S}$ sur le plan $(x\mathrm{O}y)$ (« vue de dessus de la surface $\mathcal{S}$ »).
Construire sur cette figure 2 la projection orthogonale sur le plan $(x\mathrm{O}y)$ des points dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$.
Placer sur cette figure 2 le point C_1, projeté orthogonal du point C sur le plan $(x\mathrm{O}y)$.

Exercice 3 (France, septembre 2002)

1) Dans un repère orthonormal de l'espace $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère les points $A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$ et $C(0;1;2)$

a. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

b. Vérifier que le vecteur $\vec{u}(1;1;1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne de ce plan.

d. Quelles sont les coordonnées des points E, F et G intersections du plan (ABC) avec les droites $(O;\ \vec{\imath})$, $(O;\ \vec{\jmath})$ et $\left(O;\ \vec{k}\right)$?

Représenter les points A, B, C et le triangle EFG dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

e. Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = 3\vec{u}$.
Déterminer ses coordonnées, puis le placer sur le graphique.

f. Pourquoi les triangles ABD et ACD sont-ils rectangles en A ?
Démontrer que BCD n'est pas rectangle.

2) Les points A, B, C et D déterminent un solide S à quatre faces triangulaires (tétraèdre) dont trois sont des triangles rectangles.
On considère un jeu où on lance le solide S . Il retombe sur une de ses faces.
On a perdu si cette face est un triangle rectangle et on a gagné dans le cas contraire.
Une étude statistique a montré que l'on avait deux fois plus de chances de perdre que de gagner.

a. On lance le solide S une fois.
Quelle est alors la probabilité que S retombe sur la face (BCD) ?

b. On lance le solide S quatre fois, les lancers étant indépendants.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face (BCD) ?
(On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.)