

**Correction.**

**Exercice 1 (Amérique du nord juin 2004 — partiel)**

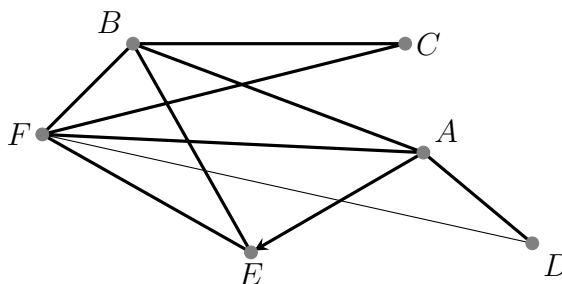
1) a. Calculons le degré des sommets du graphe.

Sommet	A	B	C	D	E	F
degré	4	4	2	2	3	5

Tous les sommets de  $G_1$  sont de degré pair, sauf  $E$  et  $F$  qui sont de degré impair. Les hypothèses du théorème d'Euler sont vérifiées, donc il existe une chaîne eulérienne entre  $E$  et  $F$ .

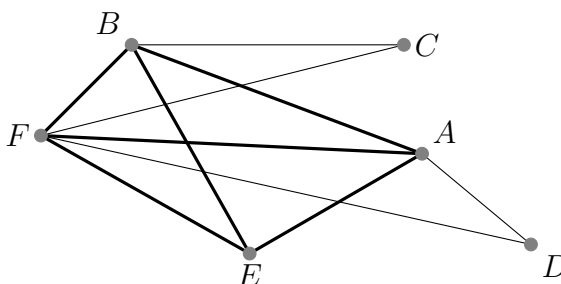
De plus on remarque qu'une chaîne eulérienne n'est possible qu'entre  $E$  et  $F$ , aucun autre couple de sommets ne vérifie les hypothèses du théorème d'Euler.

b. La chaîne  $DABCFBEFAE$  n'est pas une chaîne eulérienne de  $G_1$  car le degré de  $D$  est pair. On peut aussi regarder ce qui se passe concrètement :



La chaîne proposée ne passe jamais par l'arête  $DE$ , elle n'est donc pas eulérienne.

2) On trouve un sous-graphe complet d'ordre quatre :



On peut se demander s'il y a un sous-graphe complet d'ordre cinq. Pour prouver qu'il n'y en a pas, il faut chercher des critères *numériques* suffisants. On va, comme toujours, s'intéresser au degré des sommets.

Un sous-graphe complet d'ordre cinq est composé de cinq sommets de degré 4 reliés entre eux. Donc pour pouvoir *espérer*<sup>1</sup> trouver notre sous-graphe d'ordre cinq, il nous faut trouver cinq sommets de degré au moins 4. Or on n'en trouve que trois ( $A$ ,  $B$  et  $F$ ). Il n'y a pas de sous-graphe complet d'ordre cinq.

<sup>1</sup>C'est une condition nécessaire : si elle n'est pas vérifiée, on ne trouvera pas de sous-graphes d'ordre cinq. Par contre elle n'est pas suffisante : on peut avoir cinq sommets de degré au moins 4, mais dont les arêtes ne vont pas vers les bons sommets.

**Exercice 2 (Amérique du nord juin 2007 — partiel)**

**Première Partie : Étude d'un graphe**

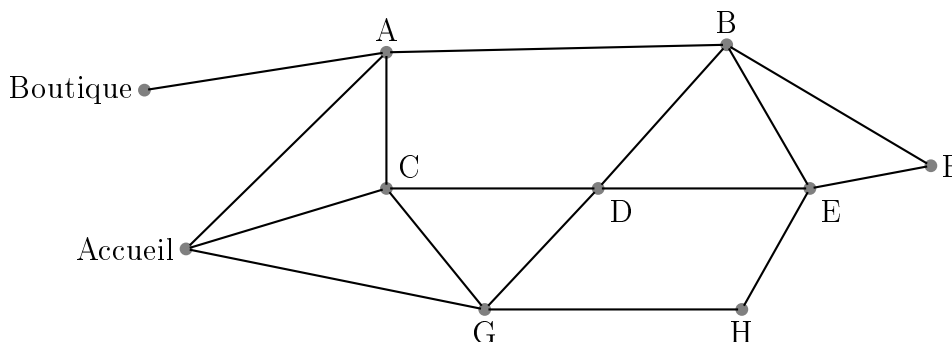
- 1) Pour toute paire de sommets, il existe une chaîne les reliant. Ce graphe est donc connexe.
- 2) Degré des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	Y	Z
degré	4	4	4	4	4	2	4	2	3	1

- 3) Tous les sommets du graphe sont de degré pair, sauf  $Y$  et  $Z$  qui sont de degré impair. Les hypothèses du théorème d'Euler sont vérifiées, donc il existe une chaîne eulérienne entre les sommets  $Y$  et  $Z$ .

**Deuxième Partie : Visite d'un musée**

- 1) Les sommets représentent chacune des salles. Deux sommets sont reliés par une arête s'il y a une porte entre les salles correspondantes. On ignore les portes d'entrée et de sortie : il faudra juste se souvenir qu'il faut commencer à l'accueil et finir à la boutique.



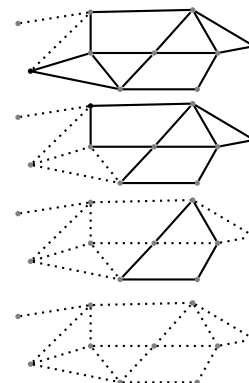
Pour vérifier que l'on n'a pas oublié d'arête, on peut (au brouillon) calculer le degré de chaque sommet, qui doit correspondre au nombre de portes. Ou bien remarquer que l'on obtient bien le graphe de la partie A.

- 2) a. Un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes correspond à une chaîne eulérienne sur le graphe associé au musée. De plus il faut que cette chaîne ait pour extrémité la boutique et l'accueil. Lors de la réponse à la question A.3, nous avons montré qu'il existait une telle chaîne.

Ainsi, il est possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes.

- b. Construisons la chaîne à l'aide de l'algorithme du cours :

- Boutique A **Accueil**.
- Boutique **A** [ Accueil G C Accueil ]
- Boutique [ A B F **E** D C A ] Accueil G C Accueil
- Boutique A B F [ E H G D B E ] D C A Accueil G C Accueil



Un circuit qui convient est par exemple :

« Boutique A B F E H G D B E D C A Accueil G C Accueil ».

Il n'est bien sûr pas unique, et vous pouvez l'avoir trouvé en moins d'étapes, voir en une seule étape.

### Exercice 3 (bonus)

On considère un nombre fini de personnes qui se serrent (ou pas) la main. On suppose que personne ne serre la main à lui-même.

- 1) Les sommets représentent chacune des personnes du groupe. Deux sommets sont reliés par une arête si les deux personnes correspondantes se sont serrées la main.
- 2) « Le nombre de mains serrées par la personne A » est exactement le degré du sommet A. Or la somme des degrés des sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes — un nombre pair ! Notons  $A_1, \dots, A_n$  les sommets de degré impair et  $B_1, \dots, B_m$  les sommets de degré pair. La formule s'écrit :

$$\deg A_1 + \dots + \deg A_n + \deg B_1 + \dots + \deg B_m = 2 \times (\text{nombre d'arêtes})$$

Les  $\deg A_i$  sont impairs, donc s'écrivent sous la forme  $2a_i + 1$  avec  $a_i \in \mathbb{N}$ . Les  $\deg B_i$  sont pair, donc s'écrivent sous la forme  $2b_i$  avec  $b_i \in \mathbb{N}$ . Par conséquent l'équation ci-dessus s'écrit

$$(2a_1 + 1) + \dots + (2a_n + 1) + 2b_1 + \dots + 2b_m = 2 \times (\text{nombre d'arêtes})$$

Il y a exactement  $n$  (le nombre de sommets impairs) fois le nombre 1 dans l'addition ci-dessus

$$2a_1 + \dots + 2a_n + n + 2b_1 + \dots + 2b_m = 2 \times (\text{nombre d'arêtes})$$

Ce qui s'écrit, en passant tous les nombre pair dans le membre de droite,

$$n = 2 \times (\text{nombre d'arêtes}) - 2a_1 - \dots - 2a_n - 2b_1 - \dots - 2b_m$$

Donc  $n$  est pair : le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.