Sujet extrait de Antilles-Guyannes, juin 2007.

Exercice 1 (5 points)

Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population. Compte tenu des naissances et des décès, on a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille. De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5 000 personnes le quittent.

En 2005, la population de ce pays était de 75 millions d'habitants. On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.

On note P_n la population de l'année $2005 + n$ exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminer P_0, P_1 et P_2. La suite de terme général P_n est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier la réponse.
2. Expliquer pourquoi on obtient, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = 1{,}014P_n + 7$.
3. Démontrer que la suite (U_n) définie par $U_n = P_n + 500$ pour tout entier naturel n est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.
4. Exprimer U_n puis P_n en fonction de n.
5. (a) Combien d'habitants peut-on prévoir en 2010 ?

   (b) Au bout de combien d'années la population aura-t-elle doublé par rapport à l'année 2005 ?

Solution.

1. P_n correspond à la population (en milliers) de l'année $2005 + n$, donc P_0 correspond à la population de l'année $2005 + 0 = 2005$: $\boxed{P_0 = 75000}$

   En 2006 la population a augmenté de 14 pour mille : $75000 + (14/1000) \times 75000$. De plus 5000 personnes ont quitté le pays et 12000 y sont arrivé, ce qui fait un solde migratoire de +7 milliers d'habitants.

   $$P_1 = 1{,}014 \times 75000 + 7 = 76057$$

   En 2007, même évolution, mais à partir de la population de 2006 :

   $$P_2 = 1{,}014 \times 76057 + 7 = 77128{,}798$$

   Si la suite était arithmétique, alors la différence entre deux termes consécutifs serait constante : on aurait $P_1 - P_0 = P_2 - P_1 = \cdots = r$. Or ici $P_1 - P_0 = 1057$ et $P_2 - P_1 = 1071{,}798$, donc $\boxed{\text{ce n'est pas une suite arithmétique}}$.

   Si la suite était géométrique, alors le quotient de deux termes consécutifs serait constant : on aurait $P_1/P_0 = P_2/P_1 = \cdots = q$. Or ici $P_1/P_0 \simeq 1{,}014093$ et $P_2/P_1 \simeq 1{,}014092$, donc $\boxed{\text{ce n'est pas une suite géométrique}}$.
2. D'une année sur l'autre (passage de $2005 + n$ à $2005 + (n + 1)$) la population a augmenté de 14 pour mille : $P_n + (14/1000) \times P_n = 1{,}014P_n$. De plus 5000 personnes ont quitté le pays et 12000 y sont arrivé, ce qui fait un solde migratoire de +7 milliers d'habitants. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$P_{n+1} = 1{,}014P_n + 7$$
3. *Commentaire : Comme toujours pour ce type de question, nous allons essayer de trouver la formule de récurrence, celle qui permet de passer de U_n à U_{n+1}. Pour obtenir le résultat, nous n'avons pas 36 possibilités : il faut utiliser la formule de récurrence définissant la suite (P_n). La méthode consiste donc à*

   – *Écrire U_{n+1} en fonction de P_{n+1},*

   – *Remplacer P_{n+1} par son expression en fonction de P_n,*

   – *Remplacer P_n par son expression en fonction de U_n.*

Remarque : si $U_n = P_n + 500$, alors $P_n = U_n - 500$. C'est débile, mais ça peut ne pas sauter aux yeux.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= P_{n+1} + 500 \\
&= 1{,}014P_n + 7 + 500 && \text{(d'après la question 2)} \\
&= 1{,}014(U_n - 500) + 7 + 500 && \text{(car } P_n = U_n - 500) \\
&= 1{,}014U_n - 507 + 7 + 500 \\
&= 1{,}014U_n
\end{aligned}$$

La suite (U_n) est donc une $\boxed{\text{suite géométrique}}$ de premier terme $U_0 = P_0 + 500 = \boxed{75500}$ et de raison $\boxed{q = 1{,}014}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_n = 75500 \times (1{,}014)^n}$ et $\boxed{P_n = U_n - 500 = 75500 \times (1{,}014)^n - 500}$.

5. (a) En $2010 = 2005 + 5$, la population sera de $P_5 = 75500 \times (1{,}014)^5 - 500 \simeq \boxed{80435}$ milliers d'habitants

   (b) La population aura doublé par rapport à 2005 lorsque $P_n = 2P_0$. C'est-à-dire lorsque

$$75500 \times (1{,}014)^n - 500 = 150000$$

   On isole la variable d'un coté (c'est une équation...) :

$$1{,}014^n = \frac{150500}{75500}$$

   Puis, pour isoler la puissance, on utilise le logarithme (« ln ») :

$$\ln(1{,}014^n) = n \ln 1{,}014 = \ln\left(\frac{150500}{75500}\right)$$

   La population aura doublé au bout de $n = \dfrac{\ln\left(\frac{150500}{75500}\right)}{\ln 1{,}014} \simeq \boxed{50}$ ans.

□