Sujet extrait de Polynesie, juin 2008.

Exercice 1 (5 points)

1. (a) **[0,75pt]** Calculons les degrés des sommets du graphe.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
degré	3	4	4	3	4	4	2

Ce graphe est connexe, et tous les sommets du graphe sont de degré pair, sauf A et D qui sont de degré impair. Les hypothèses du théorème d'Euler sont vérifiées, donc il existe une chaîne eulérienne entre A et D.

Philippe pourra donc effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables, en partant de la station A et terminant en D (ou vis versa).

(b) **[0,75pt]** Tous les sommets du graphe ne sont pas de degré pair, donc il n'existe pas de cycle eulérien : il ne pourra pas rendre sa bicyclette dans la station de départ.

2. (a) **[1pt]** Le graphe n'est pas orienté. Donc la matrice M est symétrique, et, par conséquent, toutes les matrices M^k le sont aussi.

Or la matrice T n'est pas symétrique : $t_{2,4} = 6 \neq 7 = t_{4,2}$. Donc nécessairement $M^3 = N$.

(b) **[0,5pt]** Vu le contexte (matrice M^3), cette question ne peut avoir qu'un seul sens : combien y a-t-il de trajets de longueur 3 reliant F à E.

On lit le coefficient $a_{6,5}$ de la matrice M^3. Philippe a donc pu suivre 11 trajets différents.

3. **[2pt]** Nous allons utiliser l'algorithme de Dijkstra pour calculer le plus court chemin entre les sommets A et G.

A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\bullet$	7_A	11_A	∞	∞	13_A	∞
$\bullet$	$\bullet$	11_A	22_B	21_B	13_A	∞
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	22_B	20_C	13_A	∞
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	22_B	20_C	$\bullet$	31_F
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	22_B	$\bullet$	$\bullet$	31_F
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	27_D

Le plus court chemin pour rejoindre la station G depuis la station A emprunte les stations A, B, D puis G, et prend 27 minutes.