Contrôle de Mathématiques

Exercice 1

1) Trouver la limite lorsque n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :

a. $u_n = e^{\frac{1}{n+1}}$.

b. $u_n = \ln\left(\dfrac{4}{n+1}\right)$.

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison -1.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $w_0 = 2$ et de raison $\dfrac{2}{3}$.

a. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.

b. Exprimer w_n en fonction de n. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Exprimer $S_n = w_0 + \cdots + w_n$, la somme des n premiers termes de la suite. En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Une société de crédit propose un prêt de 6000 euros à 1,5% (mensuels), remboursable par mensualités de 300 euros. On admettra que le montant u_n restant à rembourser après n mois est donné par

$$u_0 = 6000 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 1{,}015u_n - 300$$

1) Calculer u_1 et u_2. Montrer que u_n n'est ni géométrique, ni arithmétique.

2) On considère $v_n = u_n - 20\ 000$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n, en déduire u_n en fonction de n.

Exercice 3 (bonus)

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq 1 + 2n$.