



Dans les exercices suivants, toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme, et I le point d'intersection de ses diagonales. Que peut-on dire des triangles ABI et CDI ? De même, que peut-on dire des triangles BCI et AID ?

Exercice 2

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit I le point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAD}$ et de la droite (DC) et J le point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{BCD}$ et de la droite (AB) . Que peut-on dire des triangles ADI et BCJ ?

Exercice 3

Soit ABC un triangle, B' le pied de la hauteur issue de B et A' le pied de la hauteur issue de A .

- 1) Montrer que les triangles $AA'C$ et $BB'C$ sont semblables.
- 2) Dans quels cas sont-ils isométriques (donnez une condition sur le triangle ABC).

Exercice 4

Soit $ABCD$ un rectangle. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABD . On note E le point d'intersection des droites (AH) et (DC) .

Montrer que les triangles ADE et AHB sont semblables.

Exercice 5

Soit A, B, C et D quatre points situés sur un cercle $\mathcal{C}$, dans cet ordre. On note $I = (AC) \cap (BD)$. De plus $DB = 8$, $DI = 3$, $DC = 5$ et $AI = 4$. Calculer les longueurs BI , AB et IC , après avoir justifié que les triangles DIC et AIB sont semblables.

Exercice 6

Soit A, B, C trois points situés sur un cercle $\mathcal{C}$. La bissectrice de l'angle $\hat{A}$ intercepte le cercle $\mathcal{C}$ au point E . On note $D = (AE) \cap (BC)$.

- 1) Montrer que les angles $\widehat{EBD}$ et $\widehat{BAE}$ sont égaux.
- 2) Montrer que les triangles DBE et BAE sont semblables.
- 3) En déduire la relation $EB^2 = EA \times ED$.

Exercice 7

On considère un quadrilatère $ABDC$ (attention ! $ABDC$) et I le milieu de $[AB]$ tel que AIC , BID et IDC soient des triangles rectangles.

- 1) Montrer que les triangles AIC et BDI sont semblables et que $BI \times IC = AC \times ID$.
- 2) En déduire que
 - a. Les triangles ICD et ACI sont semblables,
 - b. (DI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BDC}$,
 - c. (CI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACD}$.

Exercice 8

Soit A, B, C, D quatre points situés sur un cercle $\mathcal{C}$, et I l'intersection des droites (CD) et (AB) . IBC et IAD sont-ils semblables?

Exercice 9

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 3$ et $AD = 2$. Soit $N \in (DC)$ tel que $DN = 1$.

- 1) a. Démontrer que les triangles ADN et BAM sont semblables.
b. Écrire les égalités de rapports qui en découlent.
- 2) En déduire que $\mathcal{A}(BAM) = 9 \times \mathcal{A}(ADN)$.

Exercice 10

Soit ABC un triangle, et H le pied de la hauteur issue de A . M est un point « mobile » de $[BC]$ qui se projette orthogonalement en I et J respectivement sur $[AB]$ et $[AC]$.

Le but de l'exercice est de montrer que le triangle IHJ garde la même forme, c'est à dire que tous les triangles IHJ sont semblables entre eux lorsque M décrit $[BC]$.

- 1) Montrer que les points A, I, H, M et J appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ (on dira qu'ils sont *cocycliques*). Tracer ce cercle.
- 2) a. Démontrer que les angles $\widehat{HIJ}$ et $\widehat{HJI}$ sont respectivement égaux à des angles constants de la figure.
b. En déduire que les triangles IHJ associés à chaque point M restent tous semblables entre eux lorsque M décrit $[BC]$.

Exercice 11

Soit ABC un triangle quelconque, on suppose que son plus petit coté est BC . On construit trois triangles équilatéraux, sur chacun des cotés : ABE et ACF à l'extérieur du triangle de départ, et BCD à l'intérieur.

- 1) Montrer que les triangles CFD et DEB sont isométriques.
- 2) En déduire la nature du quadrilatère $AEDF$.

Exercice 12

Soit ABC un triangle, et O un point à l'intérieur de ce triangle. On trace les parallèles aux cotés du triangle passant par O . Il y a trois droites. On note N et K les points d'intersection de la droite parallèle à (BC) avec, respectivement, $[AB]$ et $[AC]$. On note de même M et J les points d'intersection de la droite parallèle à (AC) avec, respectivement, $[AB]$ et $[BC]$; puis L et I les points d'intersection de la droite parallèle à (AB) avec, respectivement, $[AC]$ et $[BC]$.

- 1) Montrer que les triangles OMN , KLO et JOI sont semblables au triangle ABC , et que les rapports de proportionnalité sont respectivement $\frac{IB}{BC}$, $\frac{JC}{BC}$ et $\frac{IJ}{BC}$.
- 2) Montrer que : $\sqrt{\mathcal{A}(OMN)} + \sqrt{\mathcal{A}(KLO)} + \sqrt{\mathcal{A}(JOI)} = \sqrt{\mathcal{A}(ABC)}$