Contrôle de Mathématiques : repérage

***Correction.***

**Exercice 1**

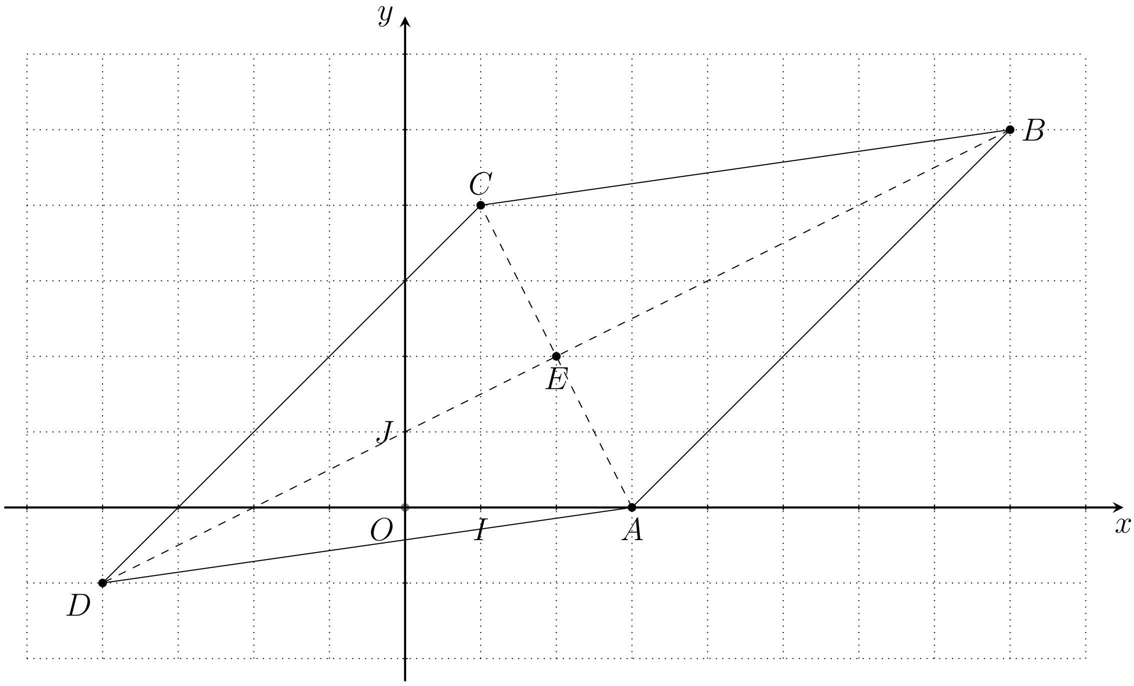
Calculons les longueurs au carré :

- $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-1-3)^2 + (2-5)^2 = (-4)^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25$
- $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (6-3)^2 + (1-5)^2 = (3)^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$
- $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (6+1)^2 + (1-2)^2 = (7)^2 + (1)^2 = 49 + 1 = 50$

Donc $AB^2 + AC^2 = 25 + 25 = 50 = BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.
De plus, on remarque que $AB = AC = \sqrt{25} = 5$. Donc le triangle $ABC$ est aussi isocèle en $A$.

**Exercice 2**

Plaçons $A(3;0)$, $B(8;5)$ et $C(1;4)$ dans un repère orthonormé $(O, I, J)$.




**2)** $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$ et $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = 7^2 + 1^2 = 50$
Ainsi $AB = \sqrt{50} = BC$, et le triangle $ABC$ est isocèle en $B$.

**3)** $x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $y_E = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2$ donc $E(2;2)$.

**4)** Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : le milieu de $[BD]$ est $E$ et a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_B + x_D}{2}; \dfrac{y_B + y_D}{2}\right)$. Ainsi

$$\frac{x_B + x_D}{2} = \frac{8 + x_D}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{5 + y_D}{2} = 2$$

La première équation équivaut à $8 + x_D = 2 \times 2 = 4$ donc $x_D = 4 - 8 = -4$, et la seconde, de même, nous donne $y_D = -1$. Le point $D$ a pour coordonnées $(-4; -1)$.
D'après la question précédente, $AB = BC$, donc le parallélogramme $ABCD$ est un losange.

**5)** Dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu (on peut aussi le prouver en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore dans un des triangles $BEC$, $BEA$, $DEA$ ou $DEC$).

**6)** Le triangle $AEB$ est rectangle en $E$, donc $\mathscr{A}_{AEB} = \dfrac{1}{2}EA \times EB$. Or

$$EA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad EB = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Donc $\mathscr{A}_{AEB} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = \dfrac{15}{2}$

Puisque $E$ est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$, $EA = EC$ et $EB = ED$. Ainsi les triangles (rectangles en $E$) $AED$, $CEB$ et $CED$ ont la même aire que $AEB$. En conclusion :

$$\mathscr{A}_{ABCD} = \mathscr{A}_{AEB} + \mathscr{A}_{AED} + \mathscr{A}_{CEB} + \mathscr{A}_{CED} = 4 \times \mathscr{A}_{AEB} = 30$$

**Exercice 3 (bonus)**

Supposons que la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ admette un minimum $m$.

Soit $x_0 \in ]0;+\infty[$ tel que $f(x_0) = m$ : le minimum est atteint en $x_0$. Puisque $x_0 > 0$, $f(x_0) = 1/x_0 > 0$, donc $m > 0$. Mais la fonction $f$ semble se rapprocher de plus en plus de 0 lorsque $x$ devient grand (calculatrice). Ainsi,

$$f(2x_0) = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2}m$$

Et, puisque $m > 0$, $1/2m < m$, ce qui est absurde.

La fonction $f$ n'admet pas de minimum sur $]0;+\infty[$.

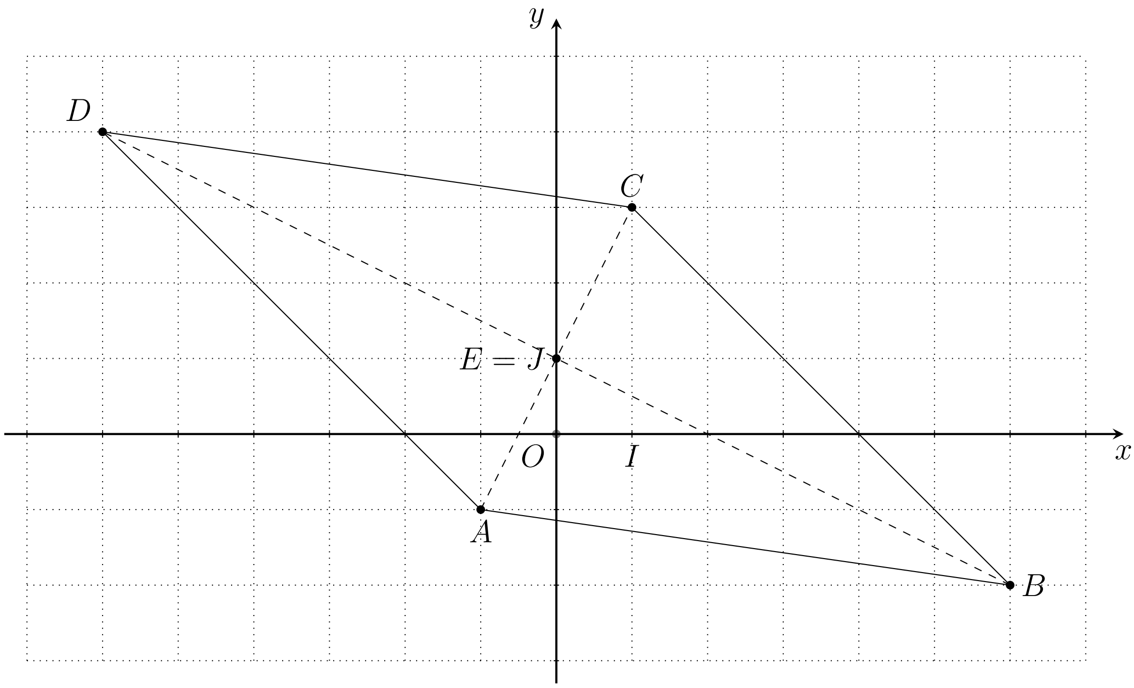
# Contrôle de Mathématiques : repérage

***Correction.***

**Exercice 1**
Calculons les longueurs au carré :
- $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-2-0)^2 + (-1-2)^2 = (-2)^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$
- $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (3-0)^2 + (-2-2)^2 = (3)^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$
- $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (3+2)^2 + (-2+1)^2 = (5)^2 + (-1)^2 = 25 + 1 = 26$

Donc $AB^2 + AC^2 = 13 + 25 \neq 26 = BC^2$. D'après le théorème de Pythagore, le triangle $ABC$ n'est pas rectangle en $A$. Il n'est pas non plus isocèle.

**Exercice 2**
Plaçons $A(-1;-1)$, $B(6;-2)$ et $C(1;3)$ dans un repère orthonormé $(O, I, J)$.




**2)** $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 1^2 + 7^2 = 50$ et $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$
Ainsi $AB = \sqrt{50} = BC$, et le triangle $ABC$ est isocèle en $B$.

**3)** $x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0$ et $y_E = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ donc $E(0;1)$.

**4)** Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : le milieu de $[BD]$ est $E$ et a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_B + x_D}{2}; \dfrac{y_B + y_D}{2}\right)$. Ainsi

$$\frac{x_B + x_D}{2} = \frac{6 + x_D}{2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-2 + y_D}{2} = 1$$

La première équation équivaut à $6 + x_D = 0 \times 2 = 0$ donc $x_D = -6$, et la seconde, de même, nous donne $y_D = 4$. Le point $D$ a pour coordonnées $(-6;4)$.
D'après la question précédente, $AB = BC$, donc le parallélogramme $ABCD$ est un losange.

**5)** Dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu (on peut aussi le prouver en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore dans un des triangles $BEC$, $BEA$, $DEA$ ou $DEC$).

**6)** Le triangle $AEB$ est rectangle en $E$, donc $\mathscr{A}_{AEB} = \frac{1}{2}EA \times EB$. Or

$$EA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad EB = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Donc $\mathscr{A}_{AEB} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = \frac{15}{2}$
Puisque $E$ est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$, $EA = EC$ et $EB = ED$. Ainsi les triangles (rectangles en $E$) $AED$, $CEB$ et $CED$ ont la même aire que $AEB$. En conclusion :

$$\mathscr{A}_{ABCD} = \mathscr{A}_{AEB} + \mathscr{A}_{AED} + \mathscr{A}_{CEB} + \mathscr{A}_{CED} = 4 \times \mathscr{A}_{AEB} = 30$$

**Exercice 3 (bonus)**
Supposons que la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ admette un minimum $m$.
Soit $x_0 \in ]0;+\infty[$ tel que $f(x_0) = m$ : le minimum est atteint en $x_0$. Puisque $x_0 > 0$, $f(x_0) = 1/x_0 > 0$, donc $m > 0$. Mais la fonction $f$ semble se rapprocher de plus en plus de 0 lorsque $x$ devient grand (calculatrice). Ainsi,

$$f(2x_0) = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2}m$$

Et, puisque $m > 0$, $1/2m < m$, ce qui est absurde.
La fonction $f$ n'admet pas de minimum sur $]0;+\infty[$.