Université Paris Dauphine
Année universitaire 2008-2009
Analyse 3, DUMI2E

Chapitre 6: Séries de Fourier

Exercice 1.

Soit f, la fonction paire, 2π-périodique, définie par

$$\forall x \in [0, \pi], f(x) = \pi^2 - x^2.$$

1. Développer la fonction f en série de Fourier.
2. En déduire la somme de la série

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

Exercice 2.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et f, la fonction 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, f(x) = \mathrm{ch}(\alpha x).$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2. Calculer la somme de la série de Fourier de f.
3. En déduire la somme des séries

$$(i)\ S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2},\ (ii)\ S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}.$$

Exercice 3.

Soit f, la fonction 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = e^{-x}.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction f.
2. En déduire que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + k^2} = \frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}}.$$

Exercice 4.

Soit f, la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } |x| \le \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi^2}{4} \text{ si } |x| \ge \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.

2. En déduire la somme des séries

$$(i)\ S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\ (ii)\ S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 5.

Soit $0 < \theta < 1$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 - 2\theta\cos(x) + \theta^2}.$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx),$$

où

$$\forall n \geq 1, \theta a_{n+1} - (1+\theta^2)a_n + \theta a_{n-1} = 0.$$

2. Calculer a_0 et a_1, puis déterminer des réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \alpha\theta^n + \frac{\beta}{\theta^n}.$$

3. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1-\theta^2}{1 - 2\theta\cos(x) + \theta^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \theta^n \cos(nx).$$

Exercice 6.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et f, une fonction 1-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha k) \right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Indication. On pourra commencer par montrer cette formule pour les fonctions $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, e_k(x) = e^{2i\pi kx}.$$

Exercice 7.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ (avec $|\alpha| \neq 1$), et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$I_k = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{\alpha - e^{ix}} dx.$$

Indication. On pourra exprimer $\frac{1}{\alpha - e^{ix}}$ comme la somme d'une série géométrique.

Exercice 8.

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = \cos(x), \\ g(x) = (\sin(x))^3. \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier des fonctions f et g.
2. Que donne la formule de Parseval pour ces deux fonctions ?

Exercice 9.

Soit $0 < \alpha < \pi$, et f, la fonction 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \leq \alpha, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2. Calculer la somme de la série de Fourier de f, et en déduire la somme de la série

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\alpha)}{n}.$$

3. Calculer les sommes des séries

$$(i)\ S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2},\ (ii)\ S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\alpha)^2}{n^2}.$$

Exercice 10: *Inégalité de Sobolev.*

Soit f, une fonction T-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_0^T f(x)dx = 0.$$

Montrer que

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \sqrt{\frac{T}{12}} \left(\int_0^T |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$