Université de Paris Dauphine
Année universitaire 2008-2009
Analyse 3, DUMI2E

Chapitre 2: Intégrales généralisées

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$.
1. Montrer à l'aide d'un changement de variables que l'on a

$$\int_0^\pi x f(\sin(x))dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))dx.$$

2. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx.$$

Exercice 2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx$.
1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$

2. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Exercice 3. Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\cos(t)+1}{1+t^2}dt$.
1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de f et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est positive sur $]-\infty,0]$ et $[1,+\infty[$, et négative sur $[0,1]$.
4. Pour quelles valeurs de x la fonction f s'annule-t-elle ?

Exercice 4. Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+, I(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt$ et $J(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{(1+t)^2}dt$.
1. a. Déterminer la valeur de $I(x)$ en fonction de x.
b. En déduire l'existence et la valeur de la limite de la fonction I en $+\infty$.
2. a. Déterminer la valeur de $J(x)$ en fonction de x.
b. En déduire l'existence et la valeur de la limite de la fonction J en $+\infty$.

Exercice 5. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leur valeur.

(i) $\int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2}dt$; (ii) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1-e^{-t})}$; (iii) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$;

(iv) $\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$; (v) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}dt$.

Exercice 6. Déterminer la nature des intégrales suivantes.

(i) $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$; (ii) $\int_0^1 \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}}dt$; (iii) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$;

(iv) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)+e^t}dt$; (v) $\int_0^{+\infty} \frac{t^3-5t^2+1}{2t^4+2t^3+t^2+1}dt$; (vi) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t}dt$;

(vii) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{\sqrt{|t^2-1|(\sqrt{t}+2)}}dt$; (viii) $\int_0^{+\infty} t^\alpha(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}})dt$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
1. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}dt$.
2. On suppose que $f(b) \neq 0$. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(t)^2 \ln(t-a)}{(b-t)^2}dt$.

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable en 0, et que $f(0) = 0$.
1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ est convergente.
2. On suppose que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}dt$ est divergente.

Exercice 9.
1. Montrer que les deux intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ sont convergentes.
2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ est convergente, et que sa valeur est égale à

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = 0.$$

3. Soit $a > 0$. A l'aide d'un changement de variables approprié, en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2a}\ln(a).$$

Exercice 10. Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
1. Montrer que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\Gamma(1) = 1.$$

2. Montrer que

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11. Soit $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n.$$

3. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Remarque. On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.