Université de Paris Dauphine
Année universitaire 2008-2009
Analyse 3, DUMI2E

Chapitre 1: Séries numériques

Exercice 1. Déterminer un équivalent des suites suivantes:

$(i)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (n\sin(\dfrac{1}{n}))^n,\ (ii)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)},\ (iii)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = n^{\frac{1}{1+n^2}} - 1.$

Exercice 2. Déterminer un développement au second ordre des suites suivantes:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n \ln(n)}$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = (\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1)^\alpha$, où $\alpha > 0$,

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\sin(\frac{1}{n})}$.

Exercice 3. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Indication. On pourra calculer $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3)$ *de deux façons différentes.*

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha},\ v_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha},\ w_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{2}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha}.$$

1. Pour quelles valeurs de α la série de terme général u_n est-elle convergente ?

2. Pour quelles valeurs de α la série de terme général v_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

3. Pour quelles valeurs de α la série de terme général w_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

Exercice 5. Déterminer la nature des séries de terme général:

(i) $u_n = \frac{1+\ln(n)}{n^2}$, (ii) $v_n = \frac{2^n+5}{3^n+11}$, (iii) $w_n = e^{-\sqrt{n}}$, (iv) $y_n = \frac{(n+1)^4}{n!+1}$,

(v) $a_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$, (vi) $b_n = \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n}$, (vii) $c_n = n^2 \sin(\frac{1}{2^n})$,

(viii) $d_n = (n^6+3)^a - (n^2+2)^{3a}$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit f une fonction positive, décroissante et continue sur $[1,+\infty[$. On note: $\forall n \in \mathbb{N}^*, F(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)dt$.

1. Montrer que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

2. En déduire que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

3. Applications.
a. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n)^\alpha}{n}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de α la série de terme général u_n est-elle convergente ?
b. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Remarque. La limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la constante d'Euler $\gamma = 0,57721566\ldots$.

Exercice 7. Déterminer la nature des séries de terme général:

$$(i)\ u_n = \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n},\ (ii) v_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n \ln(n)},\ (iii)\ w_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin(\frac{1}{n}).$$

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0.$$

Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors, la série de terme général u_n^2 est convergente.

2. Ce résultat demeure-t-il vrai si les réels u_n ne sont plus supposés positifs ?

Indication. On pourra rechercher un contre-exemple sous la forme d'une série alternée.

Exercice 9. Soit $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3}{(6n+1)(6n+4)}$.

1. Montrer que les séries de terme général u_n et v_n sont convergentes.

2. Calculer $u_{2n} + u_{2n+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ \text{et}\ v_n = \frac{u_n}{S_n}.$$

1. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général v_n est convergente.

2. Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=1}^{n} (1 - v_k) = \frac{u_0}{S_n}.$$

3. On suppose que la série de terme général v_n est convergente.
a. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(1 - v_n)$?
b. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.