

PROLONGEMENT DES FONCTIONS CONVEXES

YVES DE CORNULIER ET ROMAIN TESSERA

RÉSUMÉ. Nous donnons un critère sur un point du bord d'un ouvert convexe pour qu'on puisse y prolonger toute fonction convexe sur cet ouvert, majorée au voisinage de ce point.

Nous montrons également, si la dimension est ≥ 2 , qu'il existe toujours une fonction convexe non prolongeable en ce point.

Dans tout ce papier, C désignera un convexe ouvert non vide d'un espace vectoriel réel de dimension d , et $K = \overline{C}$ est son adhérence.

On rappelle sans démonstration le classique :

Théorème 1. *Soit f convexe sur C . Alors f est continue, et $f = \sup\{u \text{ affine}, u \leq f\}$.*

Définition 2. À toute fonction numérique f définie sur C , on associe la fonction

$$\tilde{f} = \sup\{u \text{ affine}, u \leq f\}$$

définie sur K et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On a les propriétés immédiates :

- $\tilde{f} \leq f$ sur C .
- La fonction \tilde{f} est convexe et s.c.i. sur K .
- Soit $f = -\infty$, soit $f > -\infty$.
- Si f est convexe, alors \tilde{f} est convexe sur K et prolonge f (d'après le théorème).

On a un premier résultat de continuité :

Proposition 3. *La fonction \tilde{f} est continue sur tout segment d'intérieur inclus dans C .*

Preuve : On se ramène facilement à montrer que si \mathcal{F} est un ensemble de fonctions affines sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} , avec $a < b$, et si la fonction $g = \sup_{f \in \mathcal{F}} f$ est finie sur $]a, b[$, alors g est continue sur $[a, b]$.

Ce résultat est clair, car alors g est s.c.i. comme borne supérieure de fonctions continues, et s.c.s. comme fonction convexe sur un segment et finie sur son intérieur. \square

On en déduit notamment que, si f est convexe, \tilde{f} est l'unique fonction s.c.i. sur K prolongeant f .

Le contre-exemple suivant montre qu'en général \tilde{f} n'est pas continue :

Exemple 4. Soient $D \subsetneq C$ deux boules ouvertes d'un espace euclidien, telles que les sphères s'intersectent en un point A . Notons S le bord de C . Posons

$$f = \sup\{u \text{ affine}, u \leq 0 \text{ sur } D, u \leq 1 \text{ sur } C\}$$

Alors $f = 0$ sur \overline{D} , et $f = 1$ sur $S \setminus \{A\}$. Notons g la restriction de f à C . Alors $\tilde{g} = f$, car ces deux fonctions sont égales sur C et sont continues sur tout segment. Ainsi \tilde{g} n'est pas continue.

Définition 5. Nous appelons point conique d'un convexe fermé K un point $A \in K$ tel qu'il existe un cône convexe fermé F_A de sommet A , coïncidant avec K au voisinage de A , i.e. $\exists V$ voisinage de A tel que $K \cap V = F \cap V$.

On voit qu'on a forcément

$$F_A = \bigcup_{B \in K \setminus \{A\}} [AB)$$

($[AB)$ désignant la demi-droite). Notons qu'en général, F_A n'est pas fermé.

Exemples :

Date: 31 janvier 2003.

- Tout point de l'intérieur de K est conique.
- Si K est une boule euclidienne, tout point du bord est non conique.
- Si K est un polyèdre convexe, alors tout point de K est conique.

Théorème 6. *Soit f convexe sur C . Alors \tilde{f} est continue en tout point conique de K au voisinage duquel elle est majorée. Réciproquement, si A n'est pas un point conique, alors il existe f convexe majorée sur C , telle que \tilde{f} n'est pas continue en A .*

Preuve : On se ramène, par translation, au cas $A = 0$.

Supposons 0 conique et f majorée au voisinage de 0 . Il faut montrer que \tilde{f} est s.c.s. en 0 . Supposons donc qu'il existe une suite $x_n \rightarrow 0$ telle que $\underline{\lim}(f(x_n)) > f(0)$. Alors, comme 0 est un point conique, $\frac{x_n}{\sqrt{\|x_n\|}}$ est dans K pour $n \gg 0$, et on vérifie alors, par la convexité de \tilde{f} , que $\tilde{f}(\frac{x_n}{\sqrt{\|x_n\|}})$ tend vers $+\infty$, ce qui nie l'hypothèse de majoration de f au voisinage de 0 .

Passons à la réciproque. Elle découle immédiatement des deux lemmes suivants :

Lemme 7. *Soit X l'ensemble des points de K par lesquels passent un hyperplan tangent à C et ne contenant pas 0 . Alors 0 est dans l'adhérence de X si (et seulement si) 0 est non conique.*

Lemme 8. *Il existe f convexe s.c.i. sur K , telle que $f \leq 1$, $f = 1$ sur X et $f(x) = 0$.*

Preuve du premier lemme : fixons une structure euclidienne sur l'espace et notons p la projection sur le convexe K . Montrons d'abord que x non conique $\Leftrightarrow \inf_{y \in K \setminus \{x\}} \ell([x, y] \cap K) = 0$ (ℓ désigne la longueur du segment, $[AB)$ est la demi-droite). En effet, si cette borne inférieure est > 0 , alors K coïncide avec un cône au voisinage de x , forcément fermé puisque K est fermé. (La réciproque est évidente). Donc, 0 étant non conique, l'ensemble W des points $y \in K \setminus \{x\}$ tels que $[0, y] \cap K = [0, y]$ contient 0 dans son adhérence. Maintenant, si $x \in W$, alors $p(2x) \in X$. En effet, soit H l'hyperplan orthogonal à $2x - p(2x)$ passant par $2x$. Alors, comme $2x \notin H$, l'intersection de H avec la droite $(0x)$ est réduite à un point. Comme H est tangent à K et sépare $2x$ de K , il contient un point de $]x, 2x]$, donc ne contient pas 0 . Par conséquent, X contient 0 dans son adhérence.

Prouvons maintenant le second lemme. Considérons la fonction

$$f = \sup\{u \text{ affine}, u \leq 0 \text{ sur } \frac{1}{2}K, u \leq 1 \text{ sur } K\}$$

Alors $f(0) = 0$, et $f = 1$ sur X . En effet soit $y \in X$. On sait déjà que $f(y) \leq 1$. Comme $y \in X$, il existe une forme linéaire l telle que $l \geq 1$ sur K , avec $l(y) = 1$. Posons $u(x) = 2l(x) - 1$. Alors $u \leq 0$ sur $\frac{1}{2}K$ et $u \leq 1$ sur K , et $u(y) = 1$, donc $f(y) \geq 1$. D'autre part, $f(0) = 0$ est trivial : $f(0) \leq 0$ d'après la définition de f , car $0 \in \frac{1}{2}K$, et $f(0) \geq 0$ car f est supérieure à la fonction affine nulle. \square

Notons que si x est conique dans K , alors x est conique dans $H \cap K$, où H est un hyperplan quelconque passant par x . On en déduit par une récurrence immédiate :

Théorème 9. *Tout point de K est conique si et seulement si K est un polyèdre.*

Nous appelons ici polyèdre une partie dont l'intersection avec tout cube fermé est une intersection finie de demi-espaces fermés, i.e. nous acceptons qu'il y ait une infinité de faces à l'infini.

Cas des fonctions convexes non localement bornées

Théorème 10. *Soit $A \in \partial K$. Alors il existe f convexe sur C telle que, en restriction à tout intervalle $]A, x]$, f a une limite finie en A , mais f n'est pas majorée au voisinage de K . En particulier, f ne se prolonge pas par continuité en A .*

Preuve : On peut supposer, pour alléger, que $A = 0$, et on se fixe une structure euclidienne sur E . Puisqu'il existe un hyperplan tangent en O , l'ensemble Z des vecteurs u de norme 1 telles que $\langle u, C \rangle \geq 0$ est non vide ; on vérifie facilement qu'il est fermé, donc compact. Sa frontière dans la sphère unité est non vide, car C est non vide. Soit donc u dans cette frontière. Du fait que u est sur la frontière de Z , il existe une suite x_n de C telle que $x_n \rightarrow 0$ et $\theta_n = \arcsin(\langle \frac{x_n}{\|x_n\|}, u \rangle) \rightarrow 0$. Il existe une fonction affine u_n négative sur le cône $F_{2\theta_n} = \{x \in E, \arcsin(\langle \frac{x}{\|x\|}, u \rangle) \geq 2\theta_n\}$ et égale à n en x_n . Posons $f_n = \sup(0, u_n)$ et $f = \sum f_n$. Alors f est convexe, finie sur C , n'est pas majorée au voisinage de C , mais, si $x \in C$, f bornée sur $]0, x]$, car elle y est somme d'un nombre fini de fonctions affines par morceaux : en effet, pour n assez grand, $]0, x]$ est contenu dans $F_{2\theta_n}$, dans lequel cas f_n est nul sur $]0, x]$. \square