Propriété (T)

Yves de Cornulier

Avertissement : l'exposé ci-dessous est adressé aux non-spécialistes. Ce qui suit, à l'exception des éventuelles erreurs, est strictement contenu dans les ouvrages de référence sur la propriété (T) cités dans la bibliographie.

Les groupes considérés ici sont des groupes topologiques localement compacts (i.e. Hausdorff, et tout point admet un voisinage compact), et σ-compacts (i.e. réunion dénombrable de compacts).

Soit $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ l'ensemble des opérateurs unitaires d'un espace de Hilbert complexe $\mathscr{H}$. Par représentation unitaire (continue) d'un groupe G, on entend une application $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$ telle que $\xi \to g\xi$ est continue pour tout $g \in G$.

Définition 1. Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$ une représentation unitaire de G.

On dit que π possède des vecteurs invariants s'il existe $\xi \in \mathscr{H}$ tel que $|\xi| = 1$ et $\pi(g)\xi = \xi$ pour tout $g \in G$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $W \subset G$. On dit qu'un vecteur unitaire ξ est (ε, W)-invariant si

$$\sup_{g \in W} |\pi(g)\xi - \xi| < \varepsilon$$

On dit que π possède des vecteurs quasi-invariants s'il existe un vecteur unitaire (ε, K)-invariant pour tout $\varepsilon > 0$ et tout K compact de G.

Définition 2 (Kazhdan, 1967). On dit que G a la propriété (T) de Kazhdan (ou est de Kazhdan) si toute représentation unitaire ayant des vecteurs quasi-invariants possède des vecteurs invariants.

Il n'est a priori pas facile d'exhiber des groupes de Kazhdan, car on n'a pas en général d'accès facile à toutes ses représentations unitaires. Le seul cas facile est celui-ci :

Proposition 1. *Si G est compact, alors il est de Kazhdan.*

Preuve : Soit π une représentation ayant des vecteurs quasi-invariants. Comme G est compact, elle possède un vecteur unitaire v $(\sqrt{2}, G)$-invariant. Alors $\langle v, \pi(g)v \rangle > 0$ pour tout $g \in G$. Soit

$$w = \int_G \pi(g)v \;\, d\lambda(g)$$

(Cette intégrale a un sens, en tant qu'intégrale sur un compact à valeurs dans un espace de Hilbert). Alors w est invariant, et, de plus, $\langle v, w \rangle > 0$, ce qui justifie que $w \neq 0$. ■

Exemple 1. On définit la $r$eprésentation régulière λ_G de G dans $L^2(G)$ par $g.f(x) = f(g^{-1}(x))$. Un groupe est moyennable si sa représentation régulière λ_G possède des vecteurs quasi-invariants (le prendre éventuellement comme une définition de moyennable). Cela revient à dire qu'on peut, en un certain sens, approximer les fonctions constantes par des fonctions de norme 1. Par exemple, dans $G = \mathbb{R}^d$, les vecteurs

$$f_n = \frac{1}{n^{d/2}} \mathbf{1}_{[0,n]^d}$$

sont des vecteurs unitaires quasi-invariants. On a quelque chose d'analogue dans $\mathbb{Z}^d$. En revanche, ce n'est pas le cas dans un groupe tel que le groupe libre à deux générateurs F_2 :

$$\inf\{\frac{|\partial A|}{|A|}, A \subset F_2 \text{ finie non vide}\} > 0$$

où ∂ signifie le bord au sens du graphe de Cayley pour un système de générateurs S : $\partial A = \{a \in A, \exists s \in S, as \notin A\}$. En d'autres termes, les parties de F_2 n'ont pas une frontière négligeable.

De façon générale, on montre que les groupes résolubles (en particulier, tous les groupes abéliens) sont moyennables.

D'un autre côté, λ_G possède des vecteurs invariants si et seulement s'il est compact : en effet, si λ_G possède des vecteurs invariants, cela impose qu'il existe une fonction L^2 constante non nulle sur G, et donc que G est de volume fini, donc compact.

De l'exemple ci-dessus, retenons la proposition utile :

Proposition 2. *Le groupe G est à la fois moyennable et de Kazhdan si et seulement s'il est compact.*

Donnons quelques propriétés simples sur la propriété (T).

Proposition 3. *Soit $p : G \to H$ un morphisme continu d'image dense. Si G a la propriété (T), alors H aussi. En particulier, tout quotient d'un groupe de Kazhdan est de Kazhdan.*

Preuve : Soit π une représentation unitaire de H. Si elle a des vecteurs quasi-invariants, $\pi \circ p$ aussi, donc il existe des vecteurs invariants par G, donc par son image, et donc par H par densité. ■

Exemple 2. Les groupes libres et les groupes fondamentaux infinis des surfaces n'ont pas la propriété (T) : en effet leur abélianisé est un groupe abélien infini.

Proposition 4. *Une extension de groupes de Kazhdan est de Kazhdan.*

Preuve : Soit G une extension de groupes de Kazhdan, i.e. il existe $H \lhd G$ (H fermé) tel que H et G/H soient de Kazhdan. Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$ une représentation unitaire de G. Si elle a des vecteurs quasi-invariants, sa restriction à H aussi, donc, comme H est de Kazhdan, l'ensemble des vecteurs invariants sous H est un sous-espace fermé $\mathscr{K}$ non nul de $\mathscr{H}$. Comme H est distingué dans G, $\mathscr{K}$ est stable sous G. Comme de plus H agit trivialement sur $\mathscr{K}$, l'action passe au quotient en une action de G/H, ayant des vecteurs quasi-invariants donc des vecteurs invariants puisque G/H a la propriété (T). Ces vecteurs sont donc invariants sous G. ■

Remarque 1. Il est, en revanche, faux qu'un sous-groupe fermé, même distingué, d'un groupe de Kazhdan est forcément de Kazhdan. Par exemple, on montrera que le produit semi-direct $\mathbb{R}^n \rtimes SL_n(\mathbb{R})$ a la propriété (T) si $n \geq 3$, bien que son sous-groupe distingué $\mathbb{R}^n$ ne l'a pas puisqu'il est abélien non compact.

Proposition 5. *Si G a la propriété (T), alors G est compactement engendré. En particulier, si G est discret, alors G est de type fini.*

Preuve : Soit (W_n) une suite d'ouverts relativement compacts, telle que $\overline{W_n} \subset W_{n+1}$ pour tout n, et $G = \bigcup G_n$. Soit G_n le groupe engendré par W_n. On doit montrer que $G = G_n$ pour n assez grand. Comme G_n est un sous-groupe ouvert de G (car engendré par une partie ouverte), le quotient G/G_n est discret, et on le munit de la mesure de comptage. Alors ξ_n, fonction caractéristique de 1 dans G/G_n, est de norme 1 dans $\ell^2(G/G_n)$. L'action de G sur G/G_n induit une représentation unitaire π_n de G dans $\ell^2(G/G_n)$. Soit $\pi = \bigoplus_n \pi_n$. On identifie ξ_n à son image dans le facteur $\ell^2(G/G_n)$ de $\bigoplus_n \ell^2(G/G_n)$. Alors les ξ_n donnent des vecteurs quasi-invariants. En effet, soit K un compact de G et $\varepsilon > 0$. Alors il existe n tel que $K \subset W_n$, et alors ξ_n est $(K, 0)$-invariant, donc (K, ε)-invariant. Comme G est de Kazhdan, il possède donc un vecteur invariant non nul, et donc une de ses projections, disons dans $\ell^2(G/G_n)$, est non nulle. Comme G agit transitivement sur G/G_n, cela impose que $\ell^2(G/G_n)$ possède une fonction constante, et donc G/G_n est de volume fini, donc fini. Soit F une partie finie de G qui se surjecte sur G/G_n. Alors F est contenue dans un W_m pour un $m \geq n$. Alors $G = G_m$. ■

Notons que, pour l'instant, les seuls groupes dont nous avons prouvé qu'ils sont de Kazhdan sont les groupes compacts. On peut les considérer comme les seuls exemples triviaux de groupes de Kazhdan. D'un autre côté, avec les propositions ci-dessus, il est très facile de prouver que beaucoup de groupes n'ont pas la propriété (T). On va maintenant s'atteler à montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ a la propriété (T) si $n \geq 3$.

On a besoin de la définition suivante.

Définition 3 (Propriété relative). Soit G un groupe et H un sous-groupe fermé. On dit que la paire (G, H) a la propriété (T) si toute représentation unitaire de G ayant des vecteurs invariants a des vecteurs H-invariants.

Exemple 3. La paire (G, G) a la propriété (T) si et seulement si G a la propriété (T). La paire $(G, 0)$ a toujours la propriété (T). Si (H) a la propriété (T), la paire (G, H) a la propriété (T), mais la réciproque est fausse, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1. *La paire* $(\mathbb{R}^n \rtimes SL_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ *a la propriété (T) si* $n \geq 2$.

Avant de le montrer, déduisons-en le corollaire recherché :

Corollaire 1. *Le groupe* $SL_n(\mathbb{R})$ *a la propriété (T) si* $n \geq 3$.

Pour prouver le corollaire (en admettant le théorème), on a besoin d'un lemme sur les représentations de $SL_n(\mathbb{R})$. Soit $U = \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\}$, sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes de $SL_2(\mathbb{R})$.

Plus généralement, notons $N_{n-1} = \{\begin{pmatrix} I_{n-1} & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$, $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ (vecteurs colonnes)$\}$, où I_{n-1} est la matrice identité de taille $n-1$. C'est un sous-groupe abélien de $SL_{n-1}(\mathbb{R})$, puisque $\begin{pmatrix} I_{n-1} & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & v+w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tous $v, w \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Lemme 1. *1) Soit* ξ *un vecteur* U*-invariant pour une représentation unitare de* $SL_2(\mathbb{R})$*. Alors* ξ *est invariant (pour tout* $SL_2(\mathbb{R})$*).*

2) Plus généralement, si ξ *est un vecteur* N_{n-1}*-invariant pour une représentation unitaire de* $SL_n(\mathbb{R})$*. Alors* ξ *est invariant (pour tout* $SL_n(\mathbb{R})$*).*

Preuve : 1) Posons, pour $g \in G = SL_2(\mathbb{R})$, $\varphi(g) = \langle \xi, \pi(g)\xi \rangle$. Il suffit de montrer que φ est constante égale à 1 sur G). Remarquons d'abord le phénomène suivant (général aux coefficients de représentations) : si H est un sous-groupe de G tel que φ est H-invariante à gauche, alors φ est aussi H-invariante à droite. En effet :

$$\varphi(gh) = \langle \xi, \pi(g)\pi(h)\xi \rangle = \langle \pi(h)^{-1}\pi(g)^{-1}\xi, \xi \rangle = \overline{\langle \xi, \pi(h)^{-1}\pi(g)^{-1}\xi \rangle} = \overline{\langle \xi, \pi(g)^{-1}\xi \rangle} = \langle \xi, \pi(g)\xi \rangle = \varphi(g)$$

Comme φ est U-invariante à droite, on peut la voir comme une fonction sur le quotient $SL_2(\mathbb{R})/U$, qui s'identifie naturellement à $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, pour l'action linéaire habituelle. Comme de plus φ est U-invariante à gauche, elle est constante sous les orbites de U sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, autrement dit les droites horizontales qui ne passent pas par l'origine. Mais, par continuité, cela impose que φ est constante sur la droite horizontale passant par l'origine (privée de l'origine), et donc ϕ est T-invariante à gauche, donc aussi à droite, où $T = \{\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*\}$ est le groupe des matrices triangulaires supérieures de $SL_2(\mathbb{R})$. Donc φ peut se voir comme une fonction sur $SL_2(\mathbb{R})/T = P^1(\mathbb{R})$, constante sur les orbites de T, donc constante puisqu'il y a une orbite dense (qui est même $P^1(\mathbb{R})$ privé d'un point). On a bien fini par montrer que φ est constante.

2) Pour en déduire le cas général, on considère le plongement $i_k : SL_2(\mathbb{R}) \to SL_n(\mathbb{R})$ $(1 \leq k \leq n-1)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & I_{n-1-k} & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

Soit π une représentation unitaire de $SL_n(\mathbb{R})$ et ξ un vecteur N_{n-1}-invariant. Alors, en appliquant le cas $n = 2$ à $\pi \circ i_k$, on obtient que ξ est $i_k(SL_2(\mathbb{R}))$-invariant. Or les $i_k(SL_2(\mathbb{R}))$ engendrent $SL_n(R)$, donc ξ est $SL_n(\mathbb{R})$-invariant. ∎

Voici comment en déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ a la propriété (T). Soit π une représentation unitaire de $SL_n(\mathbb{R})$ ayant des vecteurs quasi-invariants. On remarque que le sous-groupe

$$\{\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A \in SL_{n-1}(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^{n-1}$$

est isomorphe à $\mathbb{R}^{n-1} \rtimes SL_{n-1}(\mathbb{R})$. Or, $n - 1 \geq 2$, et donc, par le théorème 1, la paire $(\mathbb{R}^{n-1} \rtimes SL_{n-1}(\mathbb{R}), \mathbb{R}^{n-1})$ a la propriété (T). Donc π a un vecteur N_{n-1}-invariant, donc $SL_n(\mathbb{R})$-invariant par le lemme. Cela démontre que $SL_n(\mathbb{R})$ a la propriété (T) si $n \geq 3$.

Preuve du théorème 1.

On commence par le lemme technique mais pas difficile :

Lemme 2. *Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$ une représentation unitaire ayant des vecteurs quasi-invariants. Alors il existe une application linéaire continue : $\Phi : \mathcal{L}(\mathscr{H}) \to \mathbb{C}$ vérifiant :*
- $\Phi(Id) = 1$
- $\Phi(T^*T) \geq 0$ *pour tout* $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$
- *Pour tout $g \in G$ et tout $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$, on a $\Phi(\pi(g)T) = \Phi(T\pi(g)) = \Phi(T)$.*

Preuve : comme π possède des vecteurs quasi-invariants, il existe une suite (ξ_n) telle que $\lim_{n\to\infty} \|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| = 0$. On peut voir l'application Φ_n qui à $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ associe $\langle T\xi_n, \xi_n\rangle$ comme un élément du produit $\mathbb{C}^{\mathcal{L}(\mathscr{H})}$. Plus précisément, en notant $D(r)$ le disque fermé de rayon r dans $\mathbb{C}$, $\Phi_n \in \prod_{T\in\mathcal{L}(\mathscr{H})} D(\|T\|)$. Ce dernier espace est compact, par le théorème de Tychonov. Donc la suite Φ_n admet une valeur d'adhérence, notée $(\Phi(T))_{T\in\mathcal{L}(\mathscr{H})}$. Comme la convergence dans $\prod_{T\in\mathcal{L}(\mathscr{H})} D(\|T\|)$ n'est autre que la convergence simple, il est immédiat que Φ est linéaire (comme valeur d'adhérence d'une suite s'application linéaires), que $\Phi(Id) = 1$ et que $\Phi(T^*T) \geq 0$ pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$. Or pour tout $g \in G$, $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$,

$$|\Phi_n(T\pi(g)) - \Phi_n(T)| = |\langle T\pi(g)\xi_n, \xi_n\rangle - \langle T, \xi_n\rangle| = |\langle T(\pi(g)\xi_n - \xi_n), \xi_n\rangle| \leq \|T\|\|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| \to_{n\infty} 0$$

Donc, par passage "à la limite", $\Phi(T\pi(g)) = \Phi(T)$. L'autre égalité est analogue. ■

Le deuxième lemme, où l'on note S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$, est le suivant :

Lemme 3. *Soit N un sous-groupe distingué abélien de G. On considère l'action de G sur le dual $\widehat{N} = Hom(N, S^1)$ de N, induite par l'action de G sur N par conjugaison. On suppose que la seule probabilité finiment additive préservée par G sur $\widehat{N}$ est celle concentrée en zéro (c'est une forme forte d'ergodicité de l'action de G sur N). Alors la paire (G, N) a la propriété (T).*

Observons d'abord que le lemme implique le théorème 1 : l'action de $SL_n(\mathbb{R})$ sur le dual $Hom(\mathbb{R}^n, S^1)$ de $\mathbb{R}^n$ s'identifie à celle de $SL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ lui-même. On considère la restriction de la probabilité à $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Son image sur $P^{n-1}(\mathbb{R})$ est $SL_n(\mathbb{R})$-invariante. Or il est facile de voir que $P^{n-1}(\mathbb{R})$ n'admet aucune probabilité $SL_n(\mathbb{R})$-invariante. Donc cette mesure est nulle, ce qui signifie que la probabilité dont nous sommes partis est concentrée en zéro. Donc la paire $(\mathbb{R}^n \rtimes SL_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ vérifie bien les hypothèses du lemme 3. Il ne reste donc plus qu'à prouver ce lemme.

Preuve du lemme 3. Soit π une représentation unitaire de G. Considérons sa restriction à N. On a là une représentation unitaire du groupe abélien N. Le théorème spectral dit alors qu'il existe sur les boréliens de $\widehat{N}$ une unique mesure E à valeurs dans les projections, vérifiant

$$\pi(h) = \int_{\widehat{N}} \chi(h) dE(\chi), \quad h \in N$$

D'autre part, supposons que π a des vecteurs quasi-invariants. Alors il existe une fonction Φ comme dans le lemme précédent. Si B est un borélien de $\widehat{N}$, on pose $m(B) = \Phi(E(B))$. Les deux premières propriétés de Φ impliquent que Φ est une probabilité finiment additive sur $\widehat{N}$. Montrons qu'elle est G-invariante. Pour tout $g \in G$ et $h \in N$, on peut écrire, d'une part

$$\pi(g)\pi(h)\pi(g)^{-1} = \pi(ghg^{-1}) = \int_{\widehat{N}} \chi(ghg^{-1}) dE(\chi) = \int_{\widehat{N}} (g^{-1}\chi)(h) dE(\chi) = \int_{\widehat{N}} \chi(h) dE(g\chi)$$

et d'autre part

$$\pi(g)\pi(h)\pi(g)^{-1} = \int_{\widehat{N}} \chi(h)\pi(g) dE(\chi)\pi(g)^{-1}$$

Par unicité de la mesure spectrale, $\pi(g)E(B)\pi(g)^{-1} = E(gB)$ pour tout borélien $B \subset \widehat{N}$. Or, comme $\Phi(\pi(g)T\pi(g)^{-1}) = \Phi(T)$ pour tout T, on obtient bien que m est G-invariante. L'hypothèse du théorème dit que m est concentrée en zéro. Donc $E(0)$ est une projection non nulle, et son image est formée de vecteurs N-invariants. ■

Remarque 2. La preuve ci-dessus s'adapte aisément pour montrer que $SL_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 3)$ a la propriété (T). Avec quelques efforts de plus, on montre que $SL_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 3)$ a la propriété (T) pour tout corps local $\mathbb{K}$. Enfin, notons que $SL_2(\mathbb{K})$ n'a jamais la propriété (T). La façon la plus standard pour le montrer est d'utiliser le fait qu'il contient un réseau libre.

Références

-Propriété (T)

Pierre de la Harpe, Alain Valette, (1989) *La Propriété (T) pour les Groupes Localement Compacts.* Astérisque 175, S.M.F.

Pierre de la Harpe, Alain Valette, Bachir Bekka, (2003) *Kazhdan's Property (T)*, à paraître, disponible à l'adresse http ://poncelet.sciences.univ-metz.fr/ bekka/.

-Analyse fonctionelle

Walter Rudin (1973), *Functional Analysis*, McGraw-Hill.

John B. Conway (1990), *A Course in Functional Analysis*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 96.