Explorations combinatoires des structures arborescentes et libres

Christophe Cordero
sous la direction de
Samuele Giraudo et Jean-Christophe Novelli

du laboratoire d'informatique Gaspard-Monge
de l'université Paris-Est Marne-la-Vallée

9 décembre 2019

Objectifs

Dénombrer et énumérer des ensembles paramétrés finis.

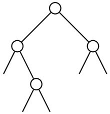
Combinatoire

Objectifs

Dénombrer et énumérer des ensembles paramétrés finis.

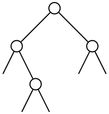
Énumérative

Formules :

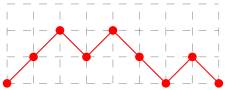


: $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Bijections :



$\longleftrightarrow$



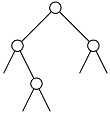
Combinatoire

Objectifs

Dénombrer et énumérer des ensembles paramétrés finis.

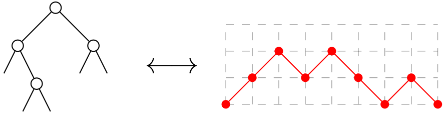
Énumérative

Formules :



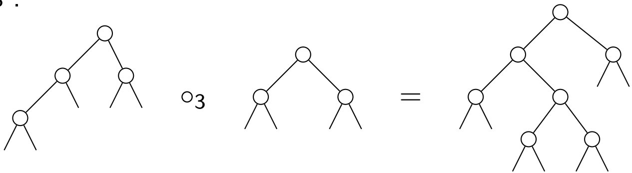
: $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Bijections :



Algébrique

Opérations :



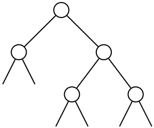
Objets combinatoires

Mots cecinestpasunmot

Objets combinatoires

Mots cecinestpasunmot

Arbres

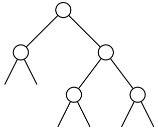


Objets combinatoires

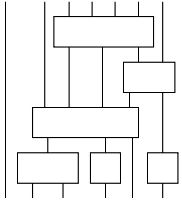
Mots

cecinestpasunmot

Arbres



Circuits

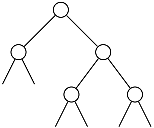


Mots

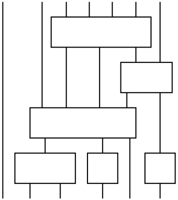
cecinestpasunmot

Dénombrement : il y a k^ℓ mots de longueur ℓ sur un alphabet à k lettres.

Arbres



Circuits

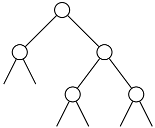


Mots

cecinestpasunmot

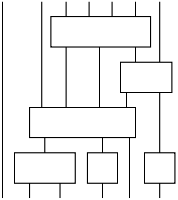
Dénombrement : il y a k^ℓ mots de longueur ℓ sur un alphabet à k lettres.

Arbres



Dénombrement : il y a $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ arbres binaires à n nœuds.

Circuits

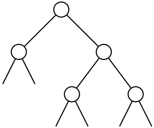


Mots

cecinestpasunmot

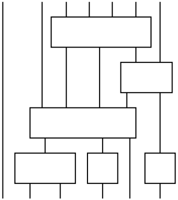
Dénombrement : il y a k^ℓ mots de longueur ℓ sur un alphabet à k lettres.

Arbres



Dénombrement : il y a $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ arbres binaires à n nœuds.

Circuits



Dénombrement : ?

I) Circuits

Définition

Un ***circuit***

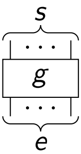
I) Circuits
Définition

Un ***circuit*** est soit un *générateur* $\begin{array}{c}\overbrace{\vert\ \cdots\ \vert}^{s}\\ \boxed{\quad g\quad}\\ \underbrace{\vert\ \cdots\ \vert}_{e}\end{array}$

I) Circuits
Définition

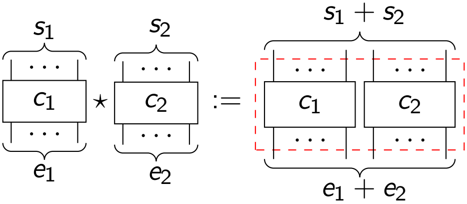
Un ***circuit*** est soit un *générateur* $\underset{\underbrace{|\ \cdots\ |}_{e}}{\overset{\overbrace{|\ \cdots\ |}^{s}}{\boxed{\ g\ }}}$, soit un *fil* $|$

I) Circuits
Définition

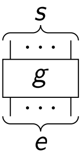
Un ***circuit*** est soit un *générateur* 

, soit un *fil* | ,

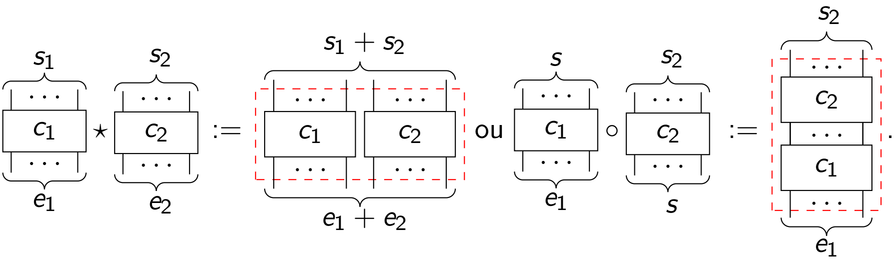
soit un assemblage :



I) Circuits
Définition

Un ***circuit*** est soit un *générateur* , soit un *fil* $|$,

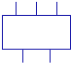
soit un des assemblages :



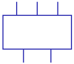
Générateurs : $$\mathbb{G} := \left\{ \overbrace{\underbrace{\boxed{1}}_{\alpha_1}}^{\beta_1}, \ldots, \overbrace{\underbrace{\boxed{m_1}}_{\alpha_1}}^{\beta_1}, \ldots, \overbrace{\underbrace{\boxed{1}}_{\alpha_d}}^{\beta_d}, \ldots, \overbrace{\underbrace{\boxed{m_d}}_{\alpha_d}}^{\beta_d} \right\}.$$

$$\mathrm{C}_{e,n,s}(\mathbb{G}) := \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\big| \quad \cdots \quad \big|}^{s} \\ \boxed{\quad n \text{ générateurs} \quad} \\ \underbrace{\big| \quad \cdots \quad \big|}_{e} \end{array} \right\}$$

Générateurs : $\mathbb{G} := \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{| \cdots |}^{\beta_1} \\ \boxed{1} \\ \underbrace{| \cdots |}_{\alpha_1} \end{array}, \ldots, \begin{array}{c} \overbrace{| \cdots |}^{\beta_1} \\ \boxed{m_1} \\ \underbrace{| \cdots |}_{\alpha_1} \end{array}, \ldots, \begin{array}{c} \overbrace{| \cdots |}^{\beta_d} \\ \boxed{1} \\ \underbrace{| \cdots |}_{\alpha_d} \end{array}, \ldots, \begin{array}{c} \overbrace{| \cdots |}^{\beta_d} \\ \boxed{m_d} \\ \underbrace{| \cdots |}_{\alpha_d} \end{array} \right\}.$

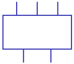
I) Dénombrement de $\mathrm{C}_{2,n,n+2}$({})

Cas initiaux

I) Dénombrement de $C_{2,n,n+2}\left(\left\{ \right\}\right)$ 

Cas initiaux

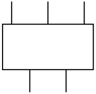
<u>$n = 0$:</u>

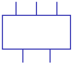
I) Dénombrement de $\mathrm{C}_{2,n,n+2}\left(\left\{\right.\right.$  $\left.\left.\right\}\right)$

Cas initiaux

$\underline{n = 0 :}$

$\underline{n = 1 :}$

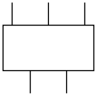


I) Dénombrement de $C_{2,n,n+2}\left(\left\{\right.\right.$$\left.\left.\right\}\right)$

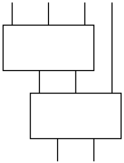
Cas initiaux

$\underline{n = 0 :}$

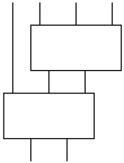
$\underline{n = 1 :}$



$\underline{n = 2 :}$

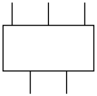


et

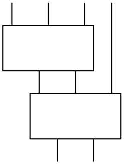


<u>$n = 0$:</u>

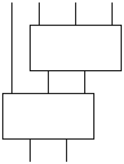
<u>$n = 1$:</u>



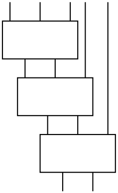
<u>$n = 2$:</u>



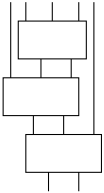
et



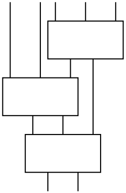
<u>$n = 3$:</u>



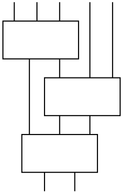
,



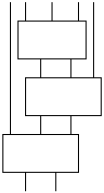
,



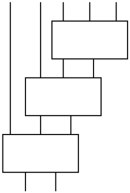
,

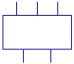


,



et

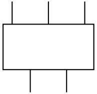


I) Dénombrement de $C_{2,n,n+2}\left(\left\{\right.\right.$$\left.\left.\right\}\right)$

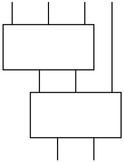
Cas initiaux

<u>$n = 0$:</u>

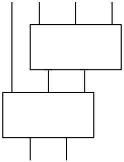
<u>$n = 1$:</u>



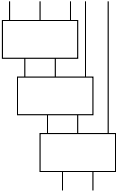
<u>$n = 2$:</u>



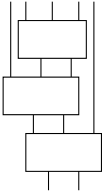
et



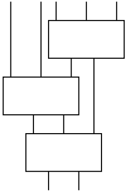
<u>$n = 3$:</u>



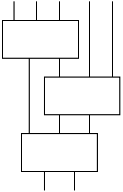
,



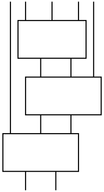
,



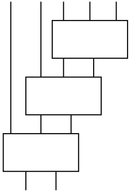
,



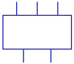
,



et

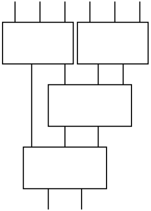


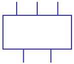
Suite : $1, 1, 2, 6, ?, \ldots$

I) Dénombrement de $C_{2,n,n+2}$({})

Difficulté : ambiguïté

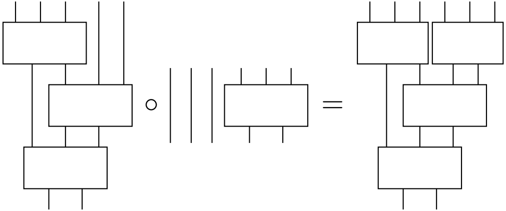
<u>$n = 4$:</u>

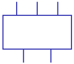


I) Dénombrement de $C_{2,n,n+2}(\{$$\})$

Difficulté : ambiguïté

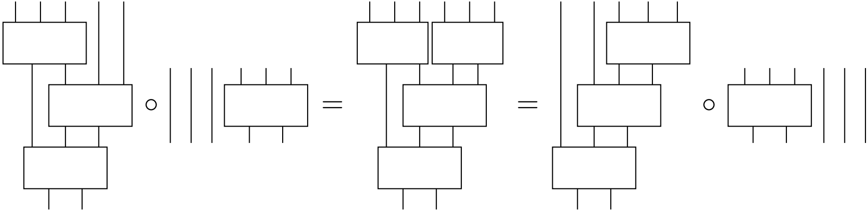
<u>$n = 4$:</u>

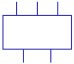


I) Dénombrement de $C_{2,n,n+2}\left(\left\{\right.\right.$  $\left.\left.\right\}\right)$

Difficulté : ambiguïté

<u>$n = 4$:</u>



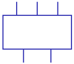
I) Dénombrement de $C_{2,n,n+2}\Big(\Big\{$  $\Big\}\Big)$

L'encyclopédie OEIS

A264868 Number of rooted tandem duplication trees on n gene segments.

1, 1, 2, 6, 22, 92, 420, 2042, 10404, 54954, 298648, 1660714, 9410772, 54174212, 316038060, 1864781388, 11111804604, 66782160002, 404392312896, 2465100947836, 15116060536540, 93184874448186, 577198134479356, 3590697904513792 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

REFERENCES Mathematics of Evolution and Phylogeny, O. Gascuel (ed.), Oxford University Press, 2005

I) Dénombrement de $C_{2,n,n+2}\left(\left\{\right.\right.$  $\left.\left.\right\}\right)$

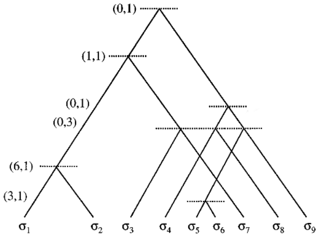
L'encyclopédie OEIS

[A264868](A264868) Number of rooted tandem duplication trees on n gene segments.

1, 1, 2, 6, 22, 92, 420, 2042, 10404, 54954, 298648, 1660714, 9410772, 54174212, 316038060, 1864781388, 11111804604, 66782160002, 404392312896, 2465100947836, 15116060536540, 93184874448186, 577198134479356, 3590697904513792 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

REFERENCES Mathematics of Evolution and Phylogeny, O. Gascuel (ed.), Oxford University Press, 2005

Arbre tandem de duplication



[Image de Gascuel, Hendy, Jean-Marie et Mclachlan]

I) Dénombrement de $\mathrm{C}_{2,n,n+2}\left(\left\{\boxed{\quad\quad}\right\}\right)$

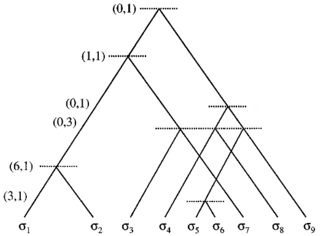
L'encyclopédie OEIS

A264868 Number of rooted tandem duplication trees on n gene segments.

1, 1, 2, 6, 22, 92, 420, 2042, 10404, 54954, 298648, 1660714, 9410772, 54174212, 316038060, 1864781388, 11111804604, 66782160002, 404392312896, 2465100947836, 15116060536540, 93184874448186, 577198134479356, 3590697904513792 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

REFERENCES Mathematics of Evolution and Phylogeny, O. Gascuel (ed.), Oxford University Press, 2005

Arbre tandem de duplication



[Image de Gascuel, Hendy, Jean-Marie et Mclachlan]

[C. en 2018]

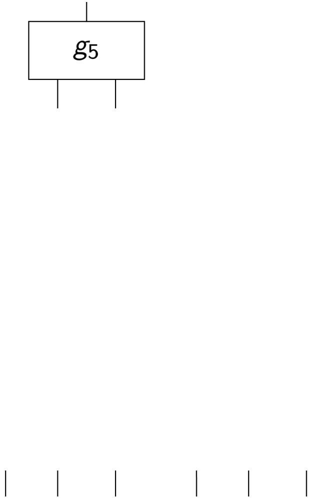
I) Construction non ambiguë des circuits

« Tetris »

Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

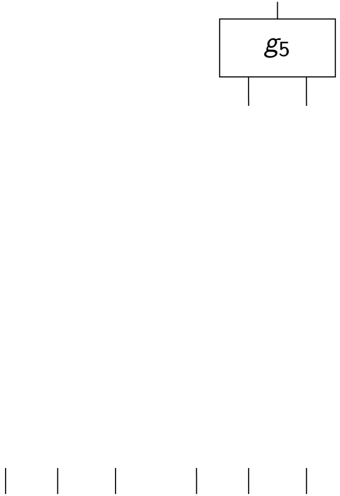
« Tetris »



Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

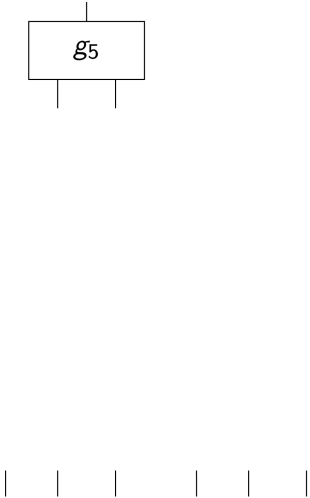
« Tetris »



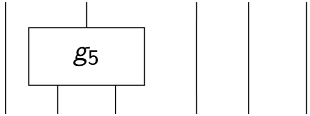
Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

« Tetris »



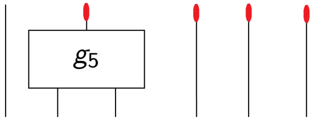
Théorème [C.]



Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

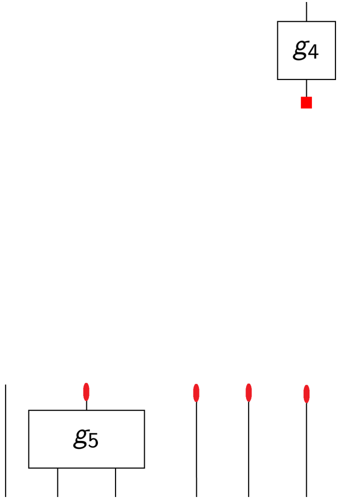
« Tetris »



Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

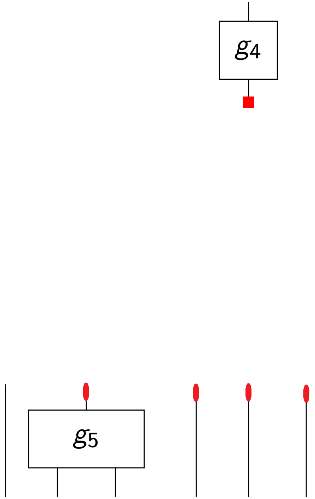
« Tetris »



Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

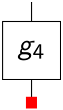
« Tetris »

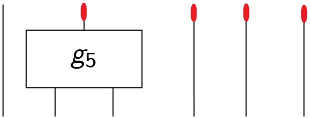


Théorème [C.]

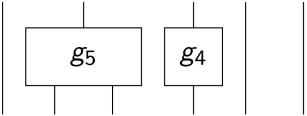
I) Construction non ambiguë des circuits

« Tetris »

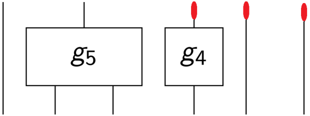




Théorème [C.]



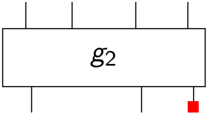
Théorème [C.]

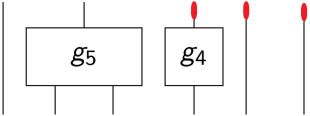


Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

« Tetris »

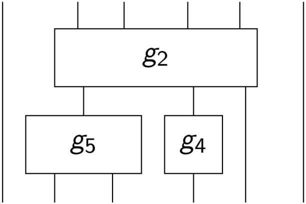




Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

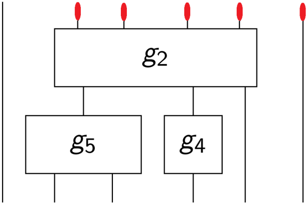
« Tetris »



Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

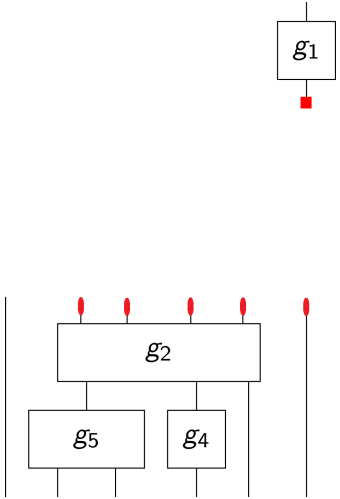
« Tetris »



Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

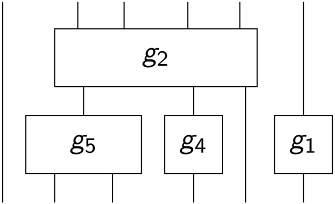
« Tetris »



Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

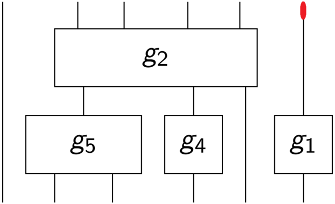
« Tetris »



Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

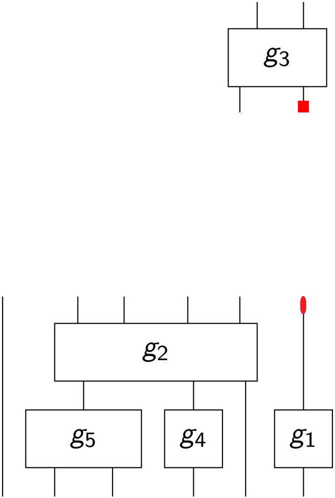
« Tetris »



Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

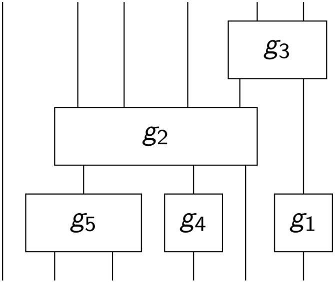
« Tetris »



Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

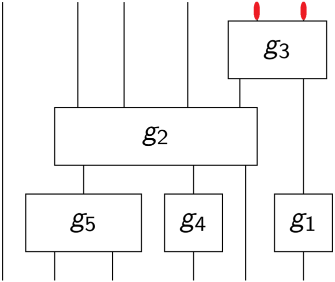
« Tetris »



Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

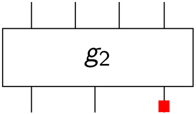
« Tetris »

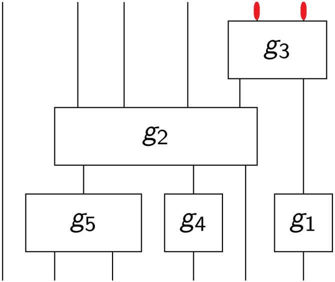


Théorème [C.]

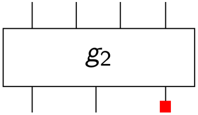
I) Construction non ambiguë des circuits

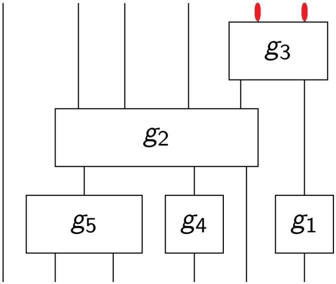
« Tetris »





Théorème [C.]

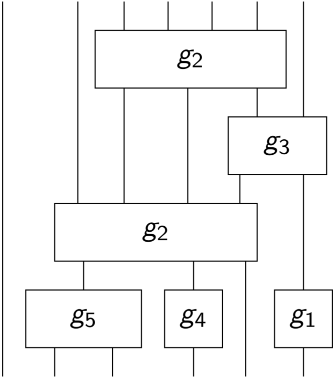




Théorème [C.]

I) Construction non ambiguë des circuits

« Tetris »



Théorème [C.]

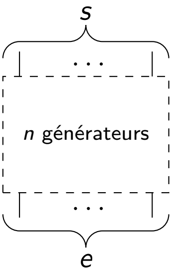
I) Bijection : circuits $\longleftrightarrow$ chemins

Théorème [C. en 2018]

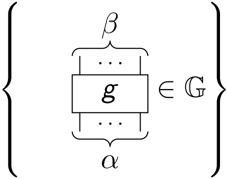
I) Bijection : circuits ⟷ chemins

Théorème [C. en 2018]

Circuits



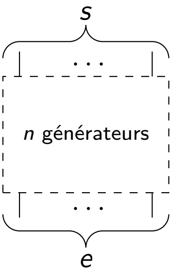
Générateurs



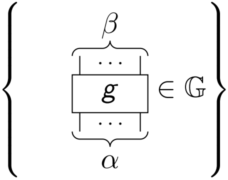
I) Bijection : circuits ⟷ chemins

Théorème [C. en 2018]

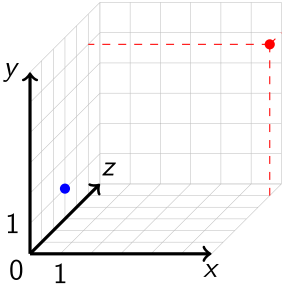
Circuits



Générateurs



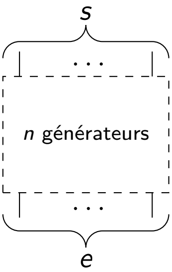
Chemins de $(0, 1, e)$ à (n, s, s)



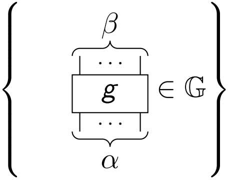
I) Bijection : circuits ⟷ chemins

Théorème [C. en 2018]

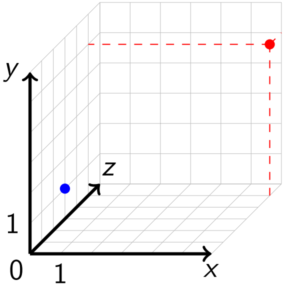
Circuits



Générateurs



Chemins de $(0, 1, e)$ à (n, s, s)

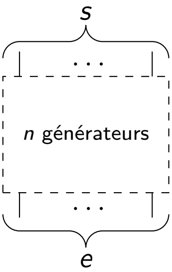


Contrainte : « $1 \leq y \leq z$ »

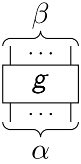
I) Bijection : circuits $\longleftrightarrow$ chemins

Théorème [C. en 2018]

Circuits

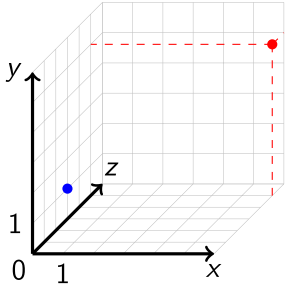


Générateurs



$$\left\{ \quad \in \mathbb{G} \right\}$$

Chemins de $(0, 1, e)$ à (n, s, s)



Contrainte : « $1 \leq y \leq z$ »

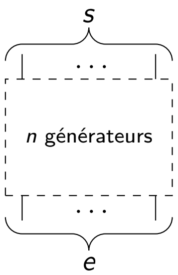
Pas

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \cup \left\{ \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - \alpha \\ \beta - \alpha \end{bmatrix}_g, \dots \right\}$$

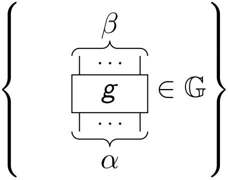
I) Bijection : circuits ⟷ chemins

Théorème [C. en 2018]

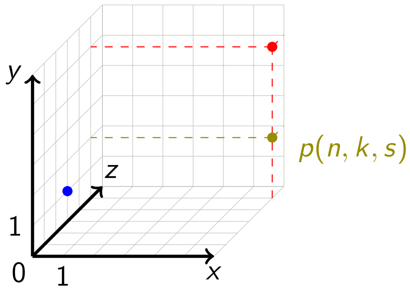
Circuits



Générateurs



Chemins de $(0, 1, e)$ à (n, s, s)



Contrainte : « $1 \le y \le z$ »

Pas

$$\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\} \cup \left\{\dots, \begin{bmatrix}1\\1-\alpha\\\beta-\alpha\end{bmatrix}_g, \dots\right\}$$

I) Formules de récurrence : 1/2

Théorème [C. en 2018]

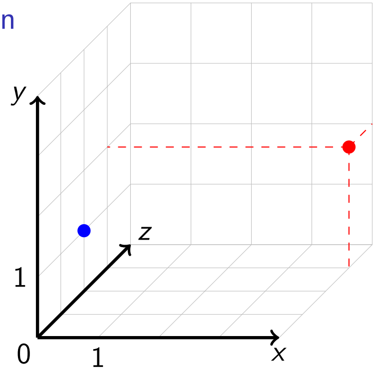
$$p(n,k,s) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0,\ k = 1 \text{ et } s = e, \\ p(n,k-1,s) + \displaystyle\sum_{g \in \mathbb{G}(\alpha,\beta)} p(n-1,k-1+\alpha,s-\beta+\alpha) & \\ & \text{si } n \geq 0 \text{ et } 1 \leq k \leq s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

I) Formules de récurrence : 1/2

Théorème [C. en 2018]

$$p(n,k,s) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0,\ k=1 \text{ et } s=e, \\ p(n,k-1,s) + \displaystyle\sum_{g\,\in\,\mathbb{G}(\alpha,\beta)} p(n-1,k-1+\alpha,s-\beta+\alpha) & \\ & \text{si } n\geq 0 \text{ et } 1\leq k\leq s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration

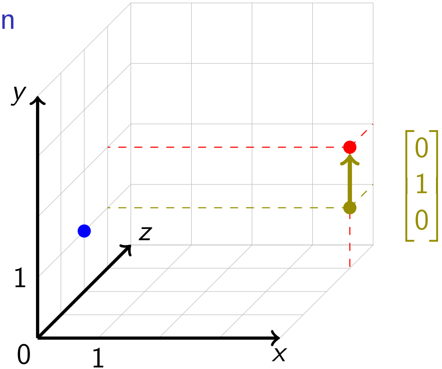


I) Formules de récurrence : 1/2

Théorème [C. en 2018]

$$p(n,k,s) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0,\ k=1 \text{ et } s=e, \\ p(n,k-1,s) + \displaystyle\sum_{g\in\mathbb{G}(\alpha,\beta)} p(n-1,k-1+\alpha,s-\beta+\alpha) & \\ & \text{si } n\geq 0 \text{ et } 1\leq k\leq s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration

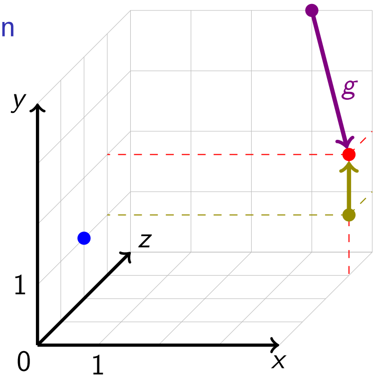


I) Formules de récurrence : 1/2

Théorème [C. en 2018]

$$p(n,k,s) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0,\ k=1 \text{ et } s=e, \\ p(n,k-1,s) + \displaystyle\sum_{g\in\mathbb{G}(\alpha,\beta)} p(n-1,k-1+\alpha,s-\beta+\alpha) & \\ & \text{si } n\geq 0 \text{ et } 1\leq k\leq s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration



$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\1-\alpha\\\beta-\alpha\end{bmatrix}_g$$

I) Formules de récurrence : 2/2

Générateurs (rappel)

$$\mathbb{G} := \left\{ \underbrace{\overbrace{\begin{array}{c} | \cdots | \\ \boxed{\;1\;} \\ | \cdots | \end{array}}^{\beta_1}}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{\overbrace{\begin{array}{c} | \cdots | \\ \boxed{\;m_1\;} \\ | \cdots | \end{array}}^{\beta_1}}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{\overbrace{\begin{array}{c} | \cdots | \\ \boxed{\;1\;} \\ | \cdots | \end{array}}^{\beta_d}}_{\alpha_d}, \ldots, \underbrace{\overbrace{\begin{array}{c} | \cdots | \\ \boxed{\;m_d\;} \\ | \cdots | \end{array}}^{\beta_d}}_{\alpha_d} \right\}$$

I) Formules de récurrence : 2/2

Générateurs (rappel)

$$\mathbb{G} := \left\{ \overbrace{\begin{array}{|c|}\hline \cdots \\ \hline 1 \\ \hline \cdots \\ \hline\end{array}}^{\beta_1}_{\alpha_1}, \ldots, \overbrace{\begin{array}{|c|}\hline \cdots \\ \hline m_1 \\ \hline \cdots \\ \hline\end{array}}^{\beta_1}_{\alpha_1}, \ldots, \overbrace{\begin{array}{|c|}\hline \cdots \\ \hline 1 \\ \hline \cdots \\ \hline\end{array}}^{\beta_d}_{\alpha_d}, \ldots, \overbrace{\begin{array}{|c|}\hline \cdots \\ \hline m_d \\ \hline \cdots \\ \hline\end{array}}^{\beta_d}_{\alpha_d} \right\}$$

Théorème [C. en 2018]

Le nombre $|\mathrm{C}_{e,\,n,\,s}(\mathbb{G})|$ vérifie la relation de récurrence :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ et } s = e, \\ \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \sum_{c_1+\ldots+c_d=\ell} \binom{\ell}{c_1,\,\ldots,\,c_d} \binom{s+\ell-\sum_{i=1}^{d} c_i\beta_i}{\ell} m_1^{c_1} \ldots m_d^{c_d} \left| \mathrm{C}_{e,n-\ell,s-\sum_{i=1}^{d} c_i(\beta_i-\alpha_i)}(\mathbb{G}) \right| \\ & \text{si } n, s \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Générateurs

$$\mathbb{G} := \left\{ \overbrace{\underbrace{\begin{array}{c} |\ \cdots\ | \\ \boxed{\ 1\ } \\ |\ \cdots\ | \end{array}}_{\alpha}}^{\beta}, \ldots, \overbrace{\underbrace{\begin{array}{c} |\ \cdots\ | \\ \boxed{\ m\ } \\ |\ \cdots\ | \end{array}}_{\alpha}}^{\beta} \right\}$$

Générateurs

$$\mathbb{G} := \left\{ \overbrace{\boxed{1}}^{\beta}_{\underbrace{}_{\alpha}}, \ldots, \overbrace{\boxed{m}}^{\beta}_{\underbrace{}_{\alpha}} \right\}$$

Remarque : $s = e + (\beta - \alpha)n$

Générateurs

$$\mathbb{G} := \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{| \cdots |}^{\beta} \\ \boxed{1} \\ \underbrace{| \cdots |}_{\alpha} \end{array}, \ldots, \begin{array}{c} \overbrace{| \cdots |}^{\beta} \\ \boxed{m} \\ \underbrace{| \cdots |}_{\alpha} \end{array} \right\}$$

Remarque : $s = e + (\beta - \alpha)n$

Théorème [C. en 2018]

$$|\mathrm{C}_{e,n,s}(\mathbb{G})| = m^n \det(\mathcal{B}), \text{ où } \mathcal{B}_{i,j} := \binom{e - i(\alpha - 1) + (j-1)(\beta - 1)}{i - j + 1}.$$

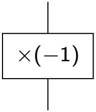
Dénombrement des circuits non libres ?

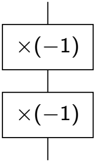
Si $\boxed{\times(-1)}$ est un « inverseur »,

Dénombrement des circuits non libres ?

Si $\boxed{\times(-1)}$ est un « inverseur », alors $\begin{array}{c}\boxed{\times(-1)}\\ \boxed{\times(-1)}\end{array} \equiv \;|\;.$

Dénombrement des circuits non libres ?

Si 

est un « inverseur », alors 

$\equiv$ | .

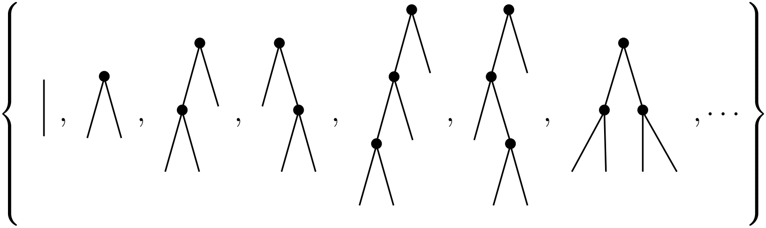
Problème

Certains circuits équivalents sont comptés plusieurs fois !

II) L'opérade magmatique : Mag

Définition

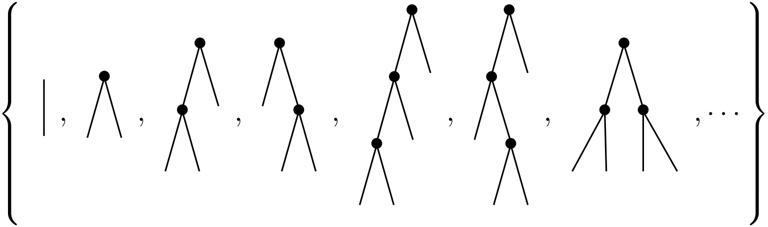
L'ensemble des arbres binaires



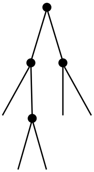
II) L'opérade magmatique : Mag

Définition

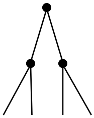
L'ensemble des arbres binaires



muni des compositions partielles $\{\circ_1, \circ_2, \circ_3, \cdots\}$:



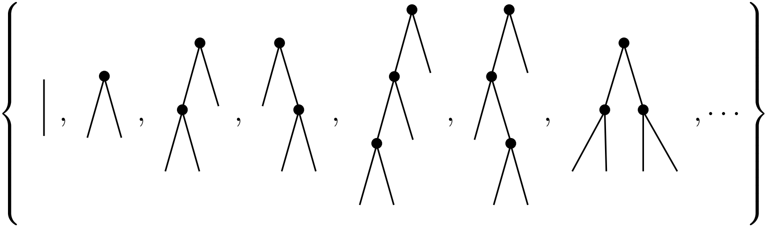
$\circ_4$



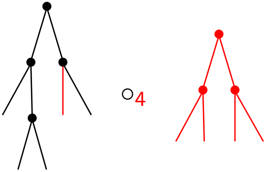
II) L'opérade magmatique : Mag

Définition

L'ensemble des arbres binaires



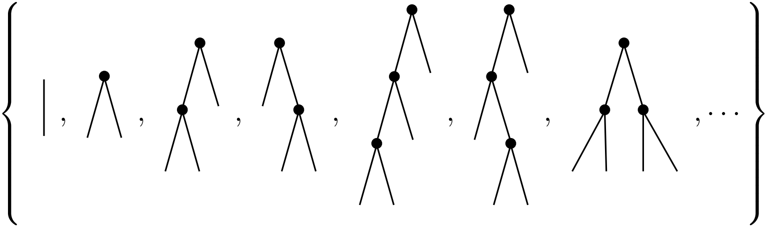
muni des compositions partielles $\{\circ_1, \circ_2, \circ_3, \cdots\}$:



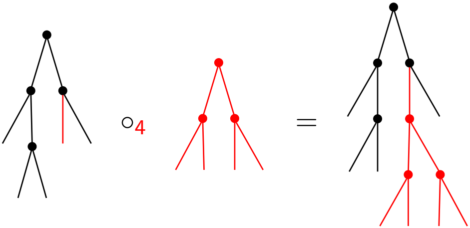
II) L'opérade magmatique : Mag

Définition

L'ensemble des arbres binaires



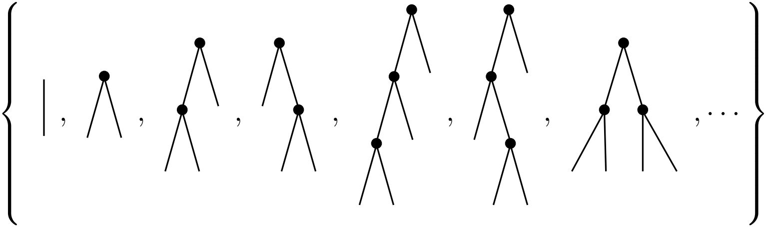
muni des compositions partielles $\{\circ_1, \circ_2, \circ_3, \cdots\}$:



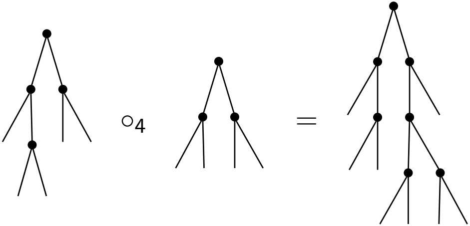
II) L'opérade magmatique : Mag

Définition

L'ensemble des arbres binaires

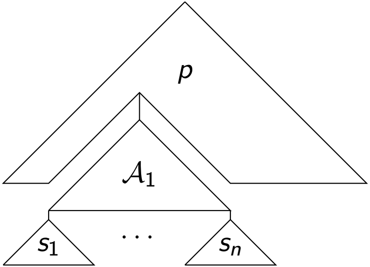


muni des compositions partielles $\{\circ_1, \circ_2, \circ_3, \cdots\}$:



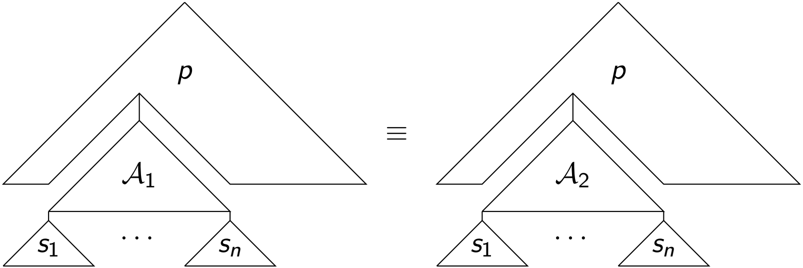
II) Quotients de Mag : $\mathsf{Mag}\Big/_{\langle \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2 \rangle}$

Définition

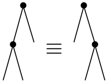

p
$\mathcal{A}_1$
s_1
$\dots$
s_n

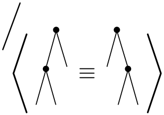
II) Quotients de Mag : $\mathsf{Mag}\big/_{\langle \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2 \rangle}$

Définition

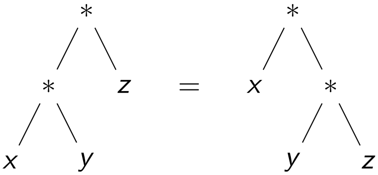


II) L'opérade associative

Définition $\mathsf{As} := \mathsf{Mag} \big/ \Big\langle$  $\Big\rangle$

Définition $\mathrm{As} := \mathrm{Mag} /$ 

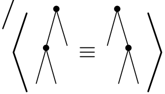
Intuition



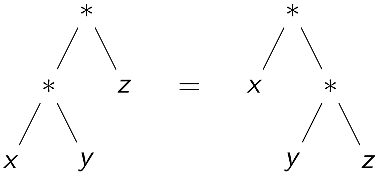
II) L'opérade associative

Définition

$$\mathrm{As} := \mathrm{Mag} \Big/$$



Intuition



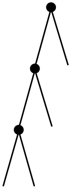
Relation algébrique

$$(x * y) * z \quad = \quad x * (y * z)$$

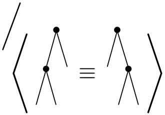
II) L'opérade associative

Définition $\mathsf{As} := \mathsf{Mag} \Big/ \Big\langle$  $\equiv$  $\Big\rangle$

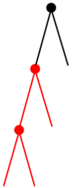
Exemple



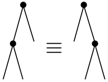
II) L'opérade associative

Définition $\mathsf{As} := \mathsf{Mag} /$ 

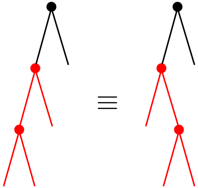
Exemple



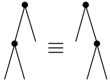
II) L'opérade associative

Définition $\mathrm{As} := \mathrm{Mag} \Big/ \Big\langle$  $\Big\rangle$

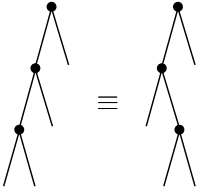
Exemple



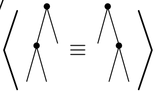
II) L'opérade associative

Définition $\mathsf{As} := \mathsf{Mag} / \langle$  $\rangle$

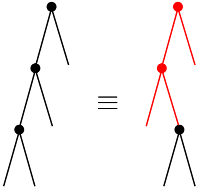
Exemple



II) L'opérade associative

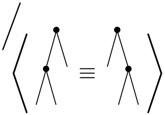
Définition As := Mag $\big/$ 

Exemple

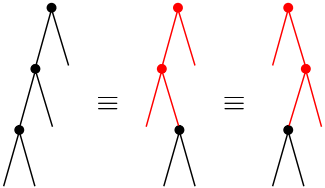


II) L'opérade associative

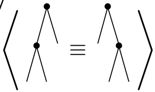
Définition $\mathrm{As} := \mathrm{Mag} \big/$



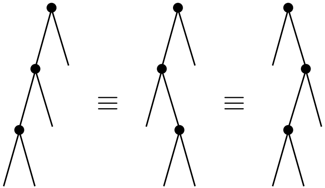
Exemple



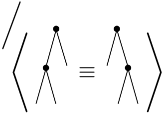
II) L'opérade associative

Définition $\mathsf{As} := \mathsf{Mag} \big/$ 

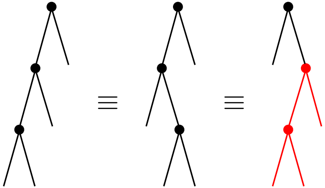
Exemple



II) L'opérade associative

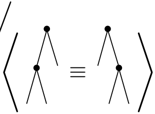
Définition As := Mag 

Exemple

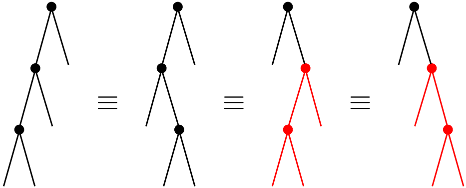


II) L'opérade associative

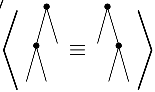
Définition As := Mag /



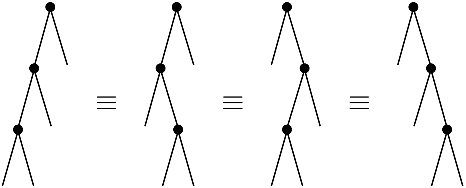
Exemple



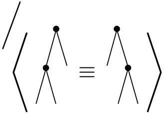
II) L'opérade associative

Définition $\mathrm{As} := \mathrm{Mag} \Big/$ 

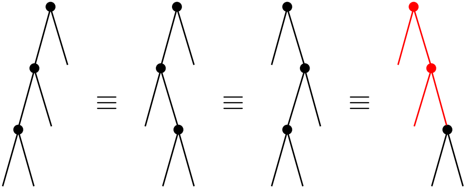
Exemple

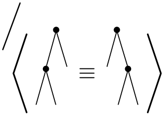


II) L'opérade associative

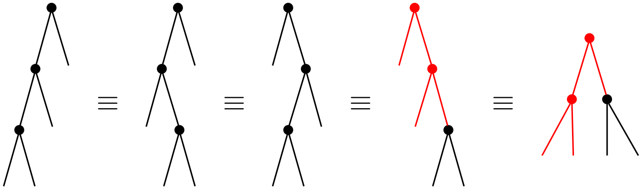
Définition $\mathsf{As} := \mathsf{Mag}$ 

Exemple

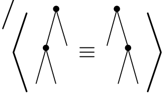


Définition $\mathsf{As} := \mathsf{Mag} \,/$ 

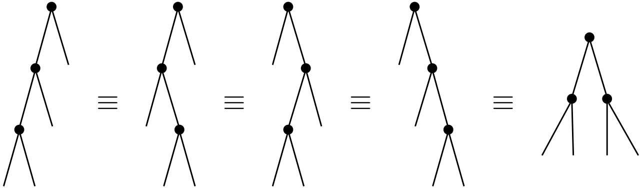
Exemple



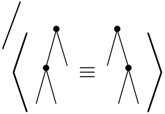
II) L'opérade associative

Définition As := Mag $/$ 

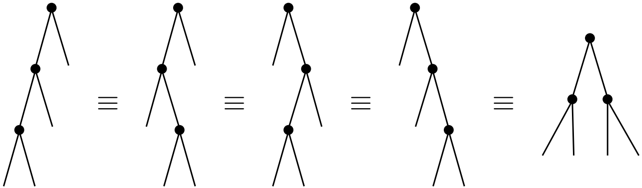
Exemple



II) L'opérade associative

Définition $\mathsf{As} := \mathsf{Mag} \big/$ 

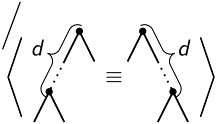
Exemple



Série de Hilbert :
$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathsf{As}}(t) &= \sum_{n \geq 1} |\mathsf{As}(n)|\, t^n \\ &= t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots \\ &= \frac{t}{1-t}\end{aligned}$$

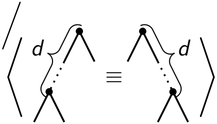
Définition [Chenavier, C. et Giraudo en 2018]

$$\mathsf{OP}^{(d)} := \mathsf{Mag} \Big/$$



Définition [Chenavier, C. et Giraudo en 2018]

$$\mathsf{OP}^{(d)} := \mathsf{Mag}/$$

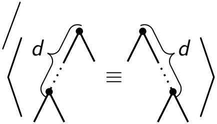


Relation

$$(\cdots((x_1 * x_2) * x_3) \cdots) * x_{d+1} = x_1 * (\cdots (x_{d-1} * (x_d * x_{d+1})) \cdots)$$

Définition [Chenavier, C. et Giraudo en 2018]

$$\mathrm{OP}^{(d)} := \mathrm{Mag} /$$



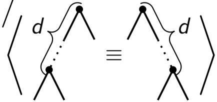
Relation

$$(\cdots((x_1 * x_2) * x_3) \cdots) * x_{d+1} = x_1 * (\cdots (x_{d-1} * (x_d * x_{d+1})) \cdots)$$

Remarques : $\mathrm{OP}^{(0)} \cong \mathrm{OP}^{(1)} \cong \mathrm{Mag}$

Définition [Chenavier, C. et Giraudo en 2018]

$$\mathrm{OP}^{(d)} := \mathrm{Mag} \Big/$$



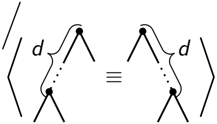
Relation

$$(\cdots((x_1 * x_2) * x_3) \cdots) * x_{d+1} = x_1 * (\cdots(x_{d-1} * (x_d * x_{d+1})) \cdots)$$

Remarques : $\mathrm{OP}^{(0)} \cong \mathrm{OP}^{(1)} \cong \mathrm{Mag}$ et $\mathrm{OP}^{(2)} = \mathrm{As}.$

Définition [Chenavier, C. et Giraudo en 2018]

$$\mathrm{OP}^{(d)} := \mathrm{Mag} /$$



Relation

$$(\cdots((x_1 * x_2) * x_3)\cdots) * x_{d+1} = x_1 * (\cdots(x_{d-1} * (x_d * x_{d+1}))\cdots)$$

Remarques : $\mathrm{OP}^{(0)} \cong \mathrm{OP}^{(1)} \cong \mathrm{Mag}$ et $\mathrm{OP}^{(2)} = \mathrm{As}$.

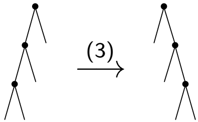
Séries de Hilbert

$$\mathcal{H}_{\mathrm{OP}^{(1)} \cong \mathrm{Mag}}(t) = t + t^2 + 2t^3 + 5t^4 + 14t^5 + 42t^6 + 132t^7 + 429t^8 \ldots$$

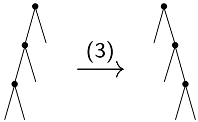
$$\mathcal{H}_{\mathrm{OP}^{(2)} \cong \mathrm{As}}(t) = t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 \ldots$$

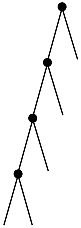
$$\mathcal{H}_{\mathrm{OP}^{(3)}}(t) = t + t^2 + 2t^3 + 4t^4 + 8t^5 + 14t^6 + 20t^7 + 19t^8 \ldots$$

II) Réécriture dans $\mathsf{OP}^{(3)}$

Règle : 

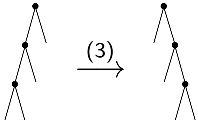
II) Réécriture dans $\mathsf{OP}^{(3)}$

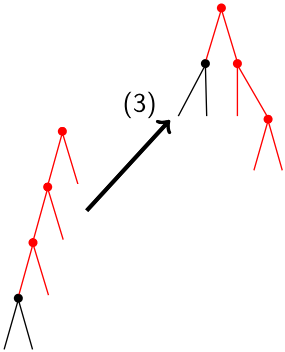
Règle : 



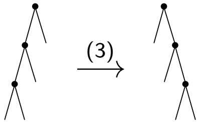
II) Réécriture dans $\mathsf{OP}^{(3)}$

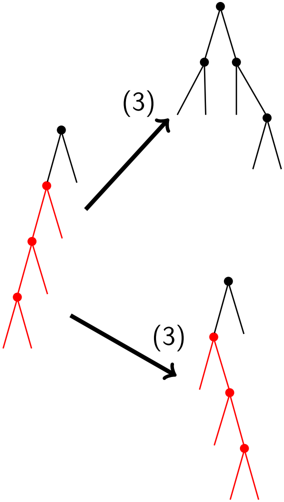
Règle :



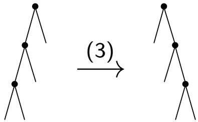


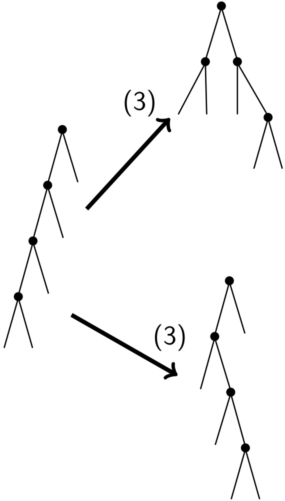
II) Réécriture dans $\mathsf{OP}^{(3)}$

Règle : 



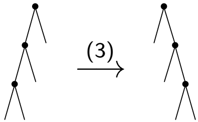
II) Réécriture dans $\mathsf{OP}^{(3)}$

Règle : 

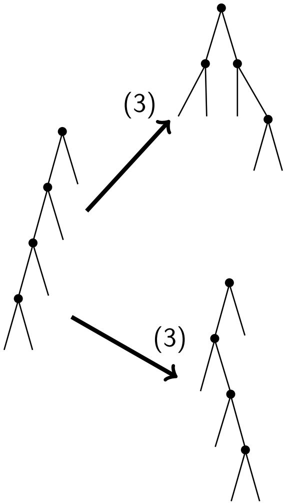


II) Réécriture dans $\mathsf{OP}^{(3)}$

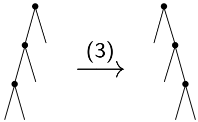
Règle :



- Pas confluent !

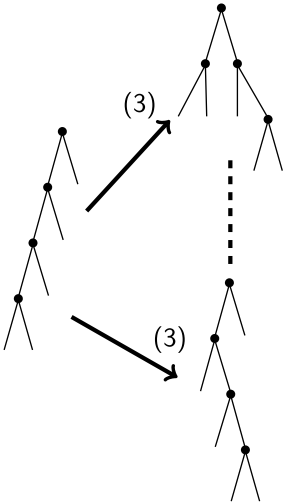


II) Réécriture dans $\mathsf{OP}^{(3)}$

Règle : 

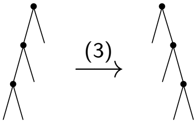
- Pas confluent !

- Calculer une complétion.
  [Dotsenko et Khoroshkin en 2010]

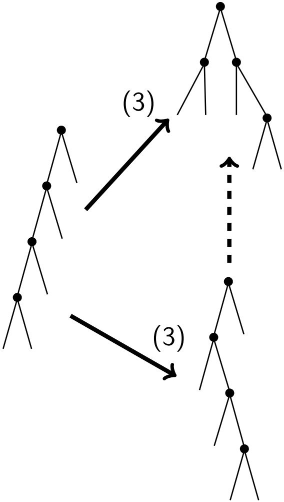


II) Réécriture dans $\mathsf{OP}^{(3)}$

Règle :

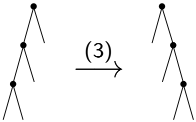


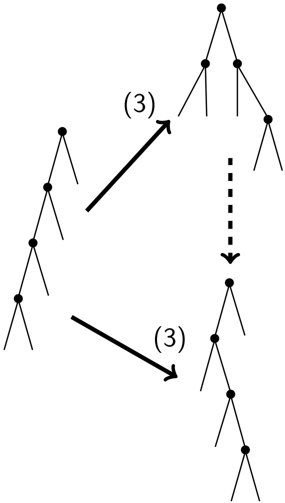
- Pas confluent !
- Calculer une complétion.
  [Dotsenko et Khoroshkin en 2010]



II) Réécriture dans $\mathsf{OP}^{(3)}$

Règle :



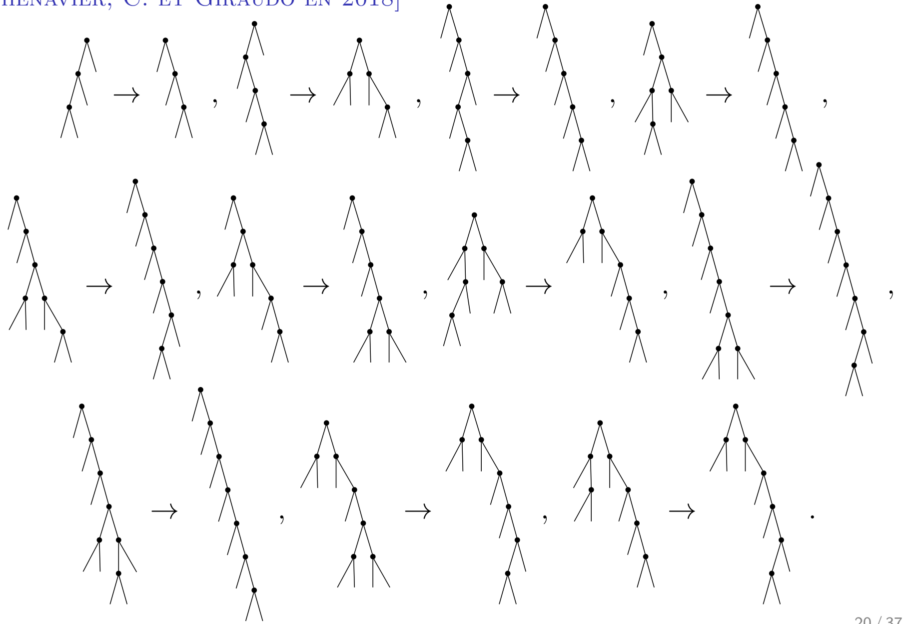


- Pas confluent !

- Calculer une complétion.
  [Dotsenko et Khoroshkin en 2010]

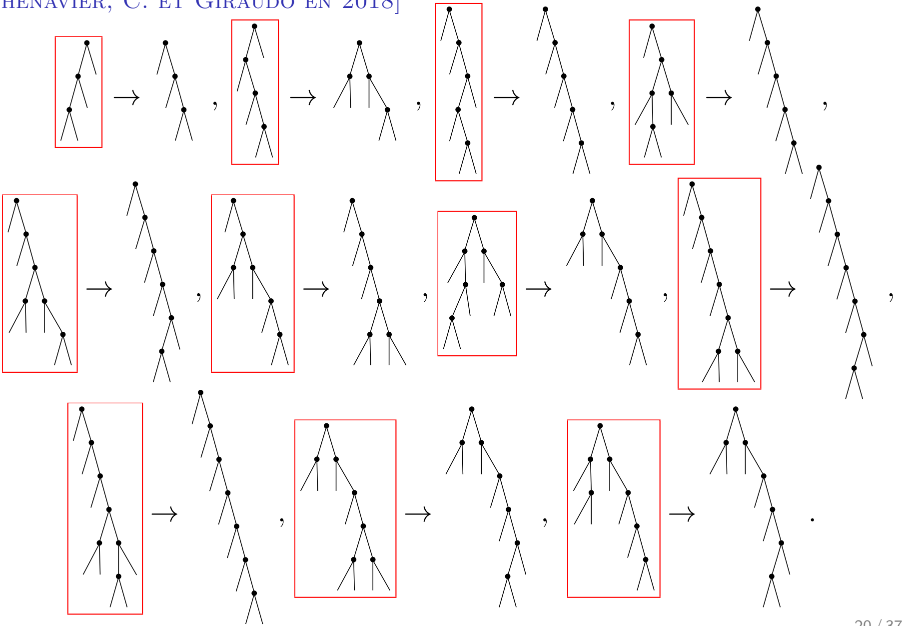
II) Système de réécriture confluent pour $\mathsf{OP}^{(3)}$

[Chenavier, C. et Giraudo en 2018]



II) Système de réécriture confluent pour $\mathsf{OP}^{(3)}$

[Chenavier, C. et Giraudo en 2018]

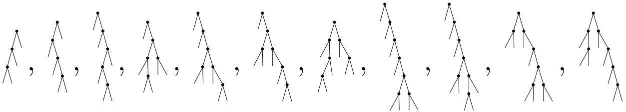


II) Dénombrement de $\mathsf{OP}^{(3)}$

Série de Hilbert

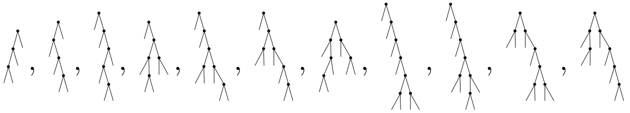
Proposition [Chenavier, C. et Giraudo en 2018]

$$\mathcal{H}_{\mathsf{OP}^{(3)}}(t) = \mathcal{G}_{\text{évite}} \left\{ \quad \right\}$$



Proposition [Chenavier, C. et Giraudo en 2018]

$$\mathcal{H}_{\mathsf{OP}^{(3)}}(t) = \mathcal{G}_{\text{évite}} \left\{ \cdots \right\}$$



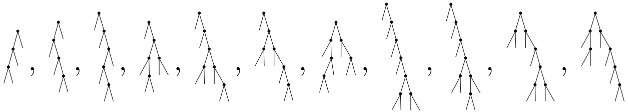
En utilisant [Rowland 2010, Khoroshkin & Piontkovski 2015 et Giraudo 2018]

II) DÉNOMBREMENT DE $\mathsf{OP}^{(3)}$

SÉRIE DE HILBERT

Proposition [Chenavier, C. et Giraudo en 2018]

$$\mathcal{H}_{\mathsf{OP}^{(3)}}(t) = \mathcal{G}_{\text{évite}} \left\{ \quad \right\}$$



En utilisant [Rowland 2010, Khoroshkin & Piontkovski 2015 et Giraudo 2018]

Théorème [Chenavier, C. et Giraudo en 2018]

$$\mathcal{H}_{\mathsf{OP}^{(3)}}(t) = \frac{t\left(1-t+t^2+t^3+2t^4+2t^5-7t^7-2t^8+t^9+2t^{10}+t^{11}\right)}{(1-t)^2}$$

$$= t + t^2 + 2t^3 + 4t^4 + 8t^5 + 14t^6 + 20t^7 + 19t^8 + 16t^9 + 14t^{10} + \sum_{n\geq 11} (n+3)t^n$$

II) Système de réécriture pour $\mathsf{OP}^{(d \geq 4)}$?

Conjecture [Chenavier, C. et Giraudo en 2018]

Il n'y a pas de système de réécriture fini et confluent pour $\mathsf{OP}^{(d)}$, où $d \geq 4$.

II) Morphismes d'opérades et treillis

Définition

Un **morphisme d'opérade** est une application $f : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ telle que :

II) Morphismes d'opérades et treillis

Définition

Un **morphisme d'opérade** est une application $f : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ telle que : pour tout $x \in \mathcal{O}_1$, $|x| = |f(x)|$

II) Morphismes d'opérades et treillis

Définition

Un **morphisme d'opérade** est une application $f : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ telle que :
pour tout $x \in \mathcal{O}_1$, $|x| = |f(x)|$
et pour tout $x, y \in \mathcal{O}_1$ et $1 \leq i \leq |x|$, $f(x \circ_i y) = f(x) \circ_i f(y)$.

II) Morphismes d'opérades et treillis

Définition

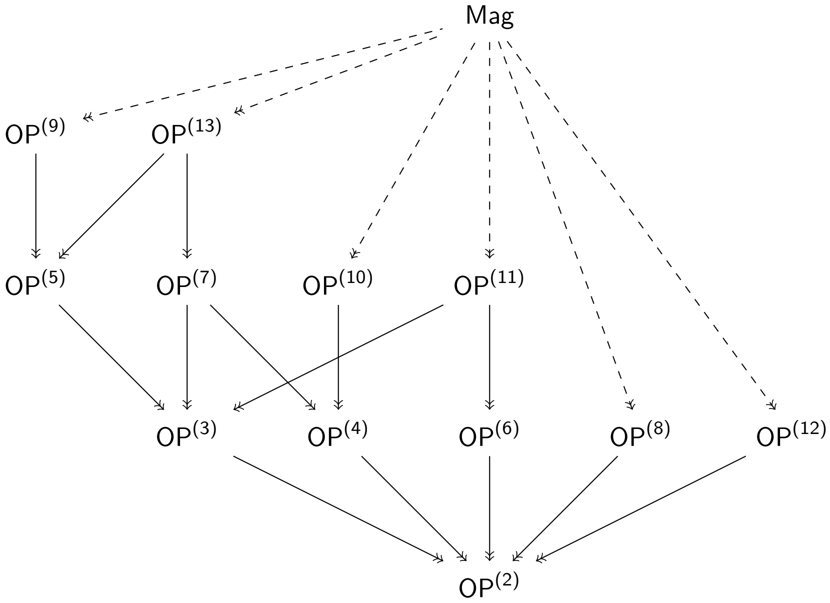
Un **morphisme d'opérade** est une application $f : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ telle que :
pour tout $x \in \mathcal{O}_1$, $|x| = |f(x)|$
et pour tout $x, y \in \mathcal{O}_1$ et $1 \leq i \leq |x|$, $f(x \circ_i y) = f(x) \circ_i f(y)$.

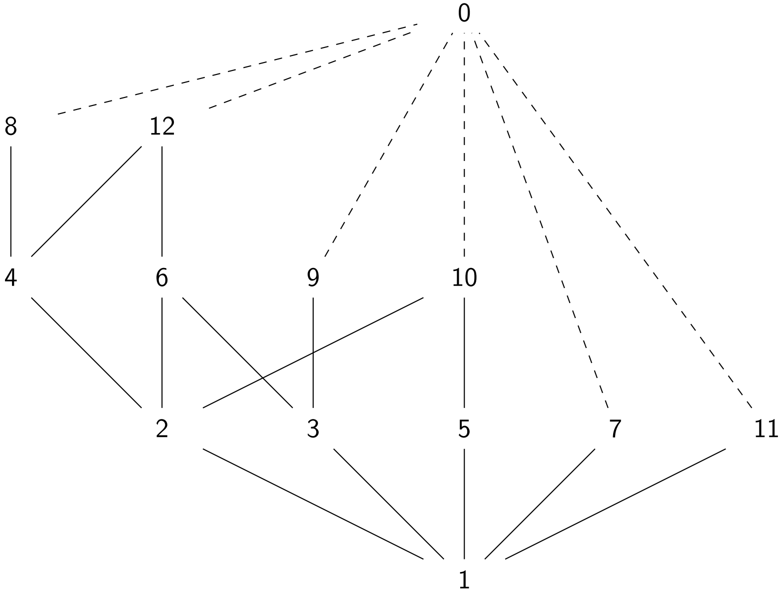
Théorème [Chenavier, C. et Giraudo en 2018]

Il existe un morphisme de $\mathrm{OP}^{(d')}$ vers $\mathrm{OP}^{(d)}$ ssi $(d-1) \,|\, (d'-1)$.
Un tel morphisme est nécessairement surjectif.

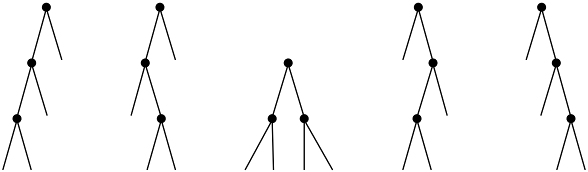
II) Morphismes d'opérades et treillis

Illustration du théorème





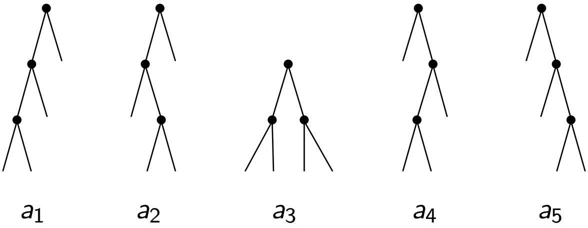
0
8
12
4
6
9
10
2
3
5
7
11
1



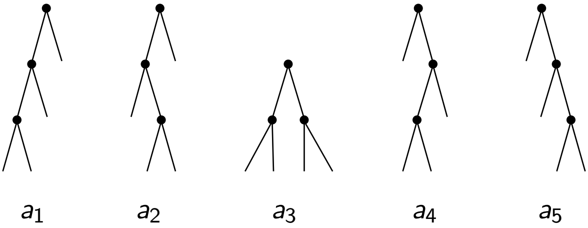
a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

II) Quotients cubiques

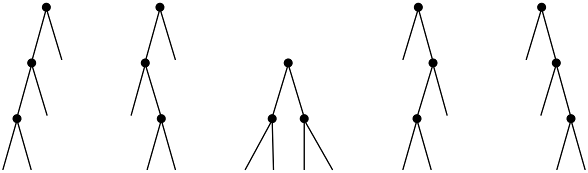
Étude exhaustive



Définition : $\mathrm{Mag}^{\{i,j\}} := \mathrm{Mag}/_{\langle a_i \equiv a_j \rangle}$



Définition : $\mathrm{Mag}^{\{i,j\}} := \mathrm{Mag}/_{\langle a_i \equiv a_j \rangle}$ **Remarque** : $\mathrm{Mag}^{\{1,5\}} = \mathrm{OP}^{(3)}$

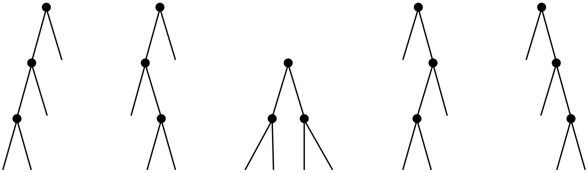


a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

Définition : $\mathrm{Mag}^{\{i,j\}} := \mathrm{Mag}/_{\langle a_i \equiv a_j \rangle}$ **Remarque :** $\mathrm{Mag}^{\{1,5\}} = \mathrm{OP}^{(3)}$

À équivalence près

$$\mathrm{Mag}^{\{1,2\}}, \mathrm{Mag}^{\{1,3\}}, \mathrm{Mag}^{\{1,4\}}, \mathrm{OP}^{(3)}, \mathrm{Mag}^{\{2,3\}} \text{ et } \mathrm{Mag}^{\{2,4\}}$$



a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

Définition : $\mathrm{Mag}^{\{i,j\}} := \mathrm{Mag}/_{\langle a_i \equiv a_j \rangle}$ Remarque : $\mathrm{Mag}^{\{1,5\}} = \mathrm{OP}^{(3)}$

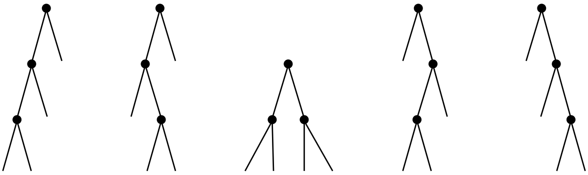
À équivalence près

$$\mathrm{Mag}^{\{1,2\}}, \mathrm{Mag}^{\{1,3\}}, \mathrm{Mag}^{\{1,4\}}, \mathrm{OP}^{(3)}, \mathrm{Mag}^{\{2,3\}} \text{ et } \mathrm{Mag}^{\{2,4\}}$$

Séries de Hilbert [Chenavier, C. et Giraudo en 2019]

$$\mathcal{H}_{\mathrm{Mag}^{\{1,2\}}}(t) = \mathcal{H}_{\mathrm{Mag}^{\{1,3\}}}(t) = \mathcal{H}_{\mathrm{Mag}^{\{1,4\}}}(t) = \mathcal{H}_{\mathrm{Mag}^{\{2,4\}}}(t) = t + \sum_{n \geq 2} 2^{n-2} t^n$$

II) Quotients cubiques
Étude exhaustive



a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

Définition : $\mathrm{Mag}^{\{i,j\}} := \mathrm{Mag}/_{\langle a_i \equiv a_j \rangle}$ Remarque : $\mathrm{Mag}^{\{1,5\}} = \mathrm{OP}^{(3)}$

À équivalence près

$$\mathrm{Mag}^{\{1,2\}}, \mathrm{Mag}^{\{1,3\}}, \mathrm{Mag}^{\{1,4\}}, \mathrm{OP}^{(3)}, \mathrm{Mag}^{\{2,3\}} \text{ et } \mathrm{Mag}^{\{2,4\}}$$

Séries de Hilbert [Chenavier, C. et Giraudo en 2019]

$$\mathcal{H}_{\mathrm{Mag}^{\{1,2\}}}(t) = \mathcal{H}_{\mathrm{Mag}^{\{1,3\}}}(t) = \mathcal{H}_{\mathrm{Mag}^{\{1,4\}}}(t) = \mathcal{H}_{\mathrm{Mag}^{\{2,4\}}}(t) = t + \sum_{n \geq 2} 2^{n-2} t^n$$

III) Théorie des codes

Un problème de communication

$$\mathcal{E} \longleftrightarrow \mathcal{R}$$

$$\mathcal{E} \longleftrightarrow \mathcal{R}$$

Lettre	Encodage
α	11
β	10001
γ	01
$\vdots$	$\vdots$

$$\mathcal{E} \xrightarrow[\text{11|10001|01|01|11}]{} \mathcal{R}$$

Lettre	Encodage
α	11
β	10001
γ	01
$\vdots$	$\vdots$

$$\mathcal{E} \xrightarrow[\text{1110001010111}]{} \mathcal{R}$$

Lettre	Encodage
α	11
β	10001
γ	01
$\vdots$	$\vdots$

$$\mathcal{E} \xrightarrow[1110001010111]{} \mathcal{R}$$

Lettre	Encodage
α	11
β	10001
γ	01
$\vdots$	$\vdots$

Problème : la trame doit avoir une unique décomposition !

III) Code

Définition

L'ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}^*$ est un ***code*** si et seulement si pour tout

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathcal{X}$$

tels que

$$x_1\, x_2\, \ldots\, x_n = y_1\, y_2\, \ldots\, y_m,$$

on a

$$n = m \text{ et } x_i = y_i, \text{ pour tout } i \in [1, n].$$

III) Code

Définition

L'ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}^*$ est un ***code*** si et seulement si pour tout

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathcal{X}$$

tels que

$$x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_n \; = \; y_1 \, y_2 \, \ldots \, y_m,$$

on a

$$n \; = \; m \text{ et } x_i \; = \; y_i, \text{ pour tout } i \in [1, n].$$

Exemple

L'ensemble $\{aabb, abaaa, b, ba\}$ n'est pas un code car

$$babaaabb = (b)(abaaa)(b)(b) \; = \; (ba)(ba)(aabb).$$

III) Code préfixe

Définition

L'ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}^*$ est ***préfixe*** si aucun élément de $\mathcal{X}$ n'est le préfixe d'un autre élément de $\mathcal{X}$.

III) Code préfixe

Définition

L'ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}^*$ est ***préfixe*** si aucun élément de $\mathcal{X}$ n'est le préfixe d'un autre élément de $\mathcal{X}$.

Exemple

L'ensemble $\{b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, \ldots\}$ est préfixe.

III) Code préfixe

Définition

L'ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}^*$ est ***préfixe*** si aucun élément de $\mathcal{X}$ n'est le préfixe d'un autre élément de $\mathcal{X}$.

Exemple

L'ensemble $\{b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, \dots\}$ est un code préfixe.

Proposition

Un ensemble préfixe différent de $\{\varepsilon\}$ est un code.

III) Conjecture commutativement préfixe

Définition

L'ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}^*$ est **commutativement préfixe** s'il existe un code préfixe $\mathcal{P}$ tel que

$$\{\!\{\, (|x|_a, |x|_b) \,:\, x \in \mathcal{X} \,\}\!\} = \{\!\{\, (|p|_a, |p|_b) \,:\, p \in \mathcal{P} \,\}\!\}\,.$$

III) Conjecture commutativement préfixe

Définition

L'ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}^*$ est **commutativement préfixe** s'il existe un code préfixe $\mathcal{P}$ tel que

$$\{\!\{\, (|x|_a, |x|_b) \,:\, x \in \mathcal{X} \,\}\!\} = \{\!\{\, (|p|_a, |p|_b) \,:\, p \in \mathcal{P} \,\}\!\}\,.$$

Exemple

L'ensemble

$$\{a, ba, aabb, baabb, ababb\}$$

est commutativement préfixe.

III) Conjecture commutativement préfixe

Définition

L'ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}^*$ est **commutativement préfixe** s'il existe un code préfixe $\mathcal{P}$ tel que

$$\{\{\,(|x|_a, |x|_b)\ :\ x \in \mathcal{X}\,\}\} = \{\{\,(|p|_a, |p|_b)\ :\ p \in \mathcal{P}\,\}\}\,.$$

Exemple

L'ensemble

$$\{a, ba, aabb, baabb, ababb\}$$

est commutativement préfixe, car il est équivalent au code

$$\{a, ba, bbaa, bbaba, bbbaa\}.$$

III) Conjecture commutativement préfixe

Définition

L'ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}^*$ est **commutativement préfixe** s'il existe un code préfixe $\mathcal{P}$ tel que

$$\{\!\{\,(|x|_a, |x|_b) \,:\, x \in \mathcal{X}\,\}\!\} = \{\!\{\,(|p|_a, |p|_b) \,:\, p \in \mathcal{P}\,\}\!\}\,.$$

Exemple

L'ensemble

$$\{a, ba, aabb, baabb, ababb\}$$

est commutativement préfixe, car il est équivalent au code

$$\{a, ba, bbaa, bbaba, bbbaa\}.$$

Conjecture [Schützenberger avant 1965]

Les codes maximaux finis sont commutativement préfixes.

III) Code non-commutativement préfixe

Théorème [C.]

L'ensemble $\mathcal{X} := \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{A}^*$ avec $|x_1| \leq |x_2| \leq \cdots \leq |x_n|$ est commutativement préfixe si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{j} \binom{|x_j| \; - |x_i|}{|x_j|_a - |x_i|_a} \leq \binom{|x_j|}{|x_j|_a},$$

pour tout j tel que $1 \leq j \leq n$.

III) Code non-commutativement préfixe

Théorème [C.]

L'ensemble $\mathcal{X} := \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{A}^*$ avec $|x_1| \leq |x_2| \leq \cdots \leq |x_n|$ est commutativement préfixe si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{j} \binom{|x_j| \;\; - |x_i|}{|x_j|_a - |x_i|_a} \leq \binom{|x_j|}{|x_j|_a},$$

pour tout j tel que $1 \leq j \leq n$.

Exploration informatique [C., Rao]

Il n'existe pas de code non commutativement préfixe dont les mots sont de longueurs au plus 6.

Exemple [Shor en 1984]

Le code
$$\left\{\begin{array}{ccccc} b, & ba, & ba^7, & ba^{13}, & ba^{14}, \\ a^3b, & a^3ba^2, & a^3ba^4, & a^3ba^6, & \\ a^8b, & a^8ba^2, & a^8ba^4, & a^8ba^6, & \\ a^{11}b, & a^{11}ba, & a^{11}ba^2 & & \end{array}\right\}$$
est non-commutativement préfixe.

Exemple [Shor en 1984]

Le code
$$\left\{\begin{array}{ccccc} b, & ba, & ba^7, & ba^{13}, & ba^{14}, \\ a^3b, & a^3ba^2, & a^3ba^4, & a^3ba^6, & \\ a^8b, & a^8ba^2, & a^8ba^4, & a^8ba^6, & \\ a^{11}b, & a^{11}ba, & a^{11}ba^2 & & \end{array}\right\}$$
est non-commutativement préfixe.

Exploration informatique [C. en 2019]

69 nouveaux codes baïonnettes non-commutativement préfixes dont

$$\left\{b, ba^2, ba^8, ba^{10}, aba^8, aba^{10}, a^4b, a^4ba^2, a^5b, a^5ba^3, a^5ba^6, a^9b, a^9ba^2\right\}.$$

III) Le ratio de Shor

Problème [Shor en 1984]

Quelle est la valeur maximale de $\dfrac{|\mathcal{X}|}{n}$, où $\mathcal{X} \subset a^*ba^* \cap \mathcal{A}^{\leq n}$ est un code ?

III) Le ratio de Shor

Problème [Shor en 1984]

Quelle est la valeur maximale de $\dfrac{|\mathcal{X}|}{n}$, où $\mathcal{X} \subset a^*ba^* \cap \mathcal{A}^{\leq n}$ est un code ?

Réponse partielle de Shor et Hansel

Cette valeur est comprise entre $\dfrac{16}{15}$ et $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

III) Le ratio de Shor

Problème [Shor en 1984]

Quelle est la valeur maximale de $\dfrac{|\mathcal{X}|}{n}$, où $\mathcal{X} \subset a^*ba^* \cap \mathcal{A}^{\leq n}$ est un code ?

Réponse partielle de Shor, C. et Hansel

Cette valeur est comprise entre $\dfrac{13}{12}$ et $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

III) Non inclusion dans un code maximal fini

Théorème [Restivo en 1977]

Le code

$$\{aaaaa, ab, b, baa\}$$

n'est pas inclus dans un code maximal fini.

III) Non inclusion dans un code maximal fini

Théorème [Restivo en 1977]

Le code

$$\{aaaaa, ab, b, baa\}$$

n'est pas inclus dans un code maximal fini.

Conjecture [C.]

Le code

$$\{aa, abab, baaa, b\}$$

est le plus petit code non inclus dans un code maximal fini.

Propriété

Si $\mathcal{X}$ est un code maximal fini alors il existe n tel que $a^n \in \mathcal{X}$.

Propriété

Si $\mathcal{X}$ est un code maximal fini alors il existe n tel que $a^n \in \mathcal{X}$.

Corollaire d'un théorème de Perrin et Schützenberger [1977]

Si $\mathcal{Y} \subseteq a^* b a^*$ est inclus dans un code maximal fini, alors il est inclus dans un code $\mathcal{X} \subseteq a^{<n} b a^{<n}$ tel que

$$\{a^n\} \cup \mathcal{X} \text{ soit un code et } |\mathcal{X}| = n.$$

III) Inclusion dans un code maximal fini ?
Condition nécessaire

Propriété
Si $\mathcal{X}$ est un code maximal fini alors il existe n tel que $a^n \in \mathcal{X}$.

Corollaire d'un théorème de Perrin et Schützenberger [1977]
Si $\mathcal{Y} \subseteq a^*ba^*$ est inclus dans un code maximal fini, alors il est inclus dans un code $\mathcal{X} \subseteq a^{<n}ba^{<n}$ tel que

$$\{a^n\} \cup \mathcal{X} \text{ soit un code et } |\mathcal{X}| = n.$$

Exploration informatique [C. en 2019]
Aucun des 70 codes non-commutativement préfixes ne vérifient cette condition pour $n \leq 32$.

Théorème [C. en 2019]

Pour chacun des 70 codes, n est nécessairement supérieur à 33 et pour 20 d'entre eux :

Nombre de codes	n
2	$30k$, où $k \geq 3$
6	$66k$, où $k \geq 3$
2	$330k$, où $k \geq 4$
4	$390k$, où $k \geq 4$
4	$390k$, où $k \geq 3$
2	$130k$, où $k \geq 3$

III) Non inclusion dans un code maximal fini

Théorème [C. en 2019]

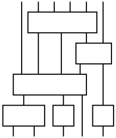
Le code

$$\left\{ba, ba^3, ba^9, ba^{11}, aba^8, aba^{10}, a^4b, a^4ba^2, a^5b, a^5ba^3, a^5ba^6, a^9b, a^9ba^2\right\} \cup \left\{a^{16}\right\}$$

est non-commutativement préfixe et non inclus dans un code maximal fini.

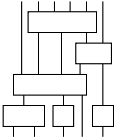
Conclusion et perspectives

I) Circuits



Conclusion et perspectives

I) Circuits

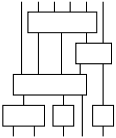


Nature (rationnelle, algébrique, holonome, etc) des séries génératrices des circuits ?

Pistes : GFun, équations fonctionnelles et singularités.

Conclusion et perspectives

I) Circuits



Nature (rationnelle, algébrique, holonome, etc) des séries génératrices des circuits ?

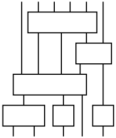
Pistes : GFun, équations fonctionnelles et singularités.

II) Opérades

Étudier les quotients d'arbres à 4 nœuds.

Conclusion et perspectives

I) Circuits

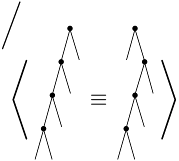


Nature (rationnelle, algébrique, holonome, etc) des séries génératrices des circuits ?

Pistes : GFun, équations fonctionnelles et singularités.

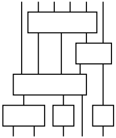
II) Opérades

Étudier les quotients d'arbres à 4 nœuds.

Exemple : Mag  donne les *animaux dirigés* [A005773].

Conclusion et perspectives

I) Circuits

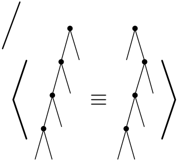


Nature (rationnelle, algébrique, holonome, etc) des séries génératrices des circuits ?

Pistes : GFun, équations fonctionnelles et singularités.

II) Opérades

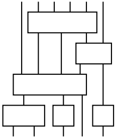
Étudier les quotients d'arbres à 4 nœuds.

Exemple : Mag  donne les *animaux dirigés* [A005773].

III) Codes

Conclusion et perspectives

I) Circuits

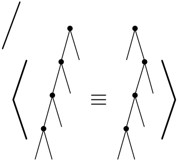


Nature (rationnelle, algébrique, holonome, etc) des séries génératrices des circuits ?

Pistes : GFun, équations fonctionnelles et singularités.

II) Opérades

Étudier les quotients d'arbres à 4 nœuds.

Exemple : Mag  donne les *animaux dirigés* [A005773].

III) Codes

Rechercher des codes non-commutativement préfixes de la forme

$$\left\{ \omega \in \{a, b\}^*, \, |\omega|_b \leq 2 \right\}.$$