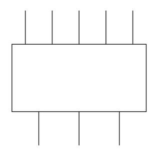
Combinatoire énumérative des prographes

Christophe Cordero

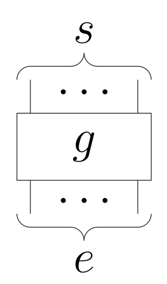
Laboratoire d'Informatique Gaspard-Monge, Université Paris-Est Marne-la-Vallée, France

Définition des prographes

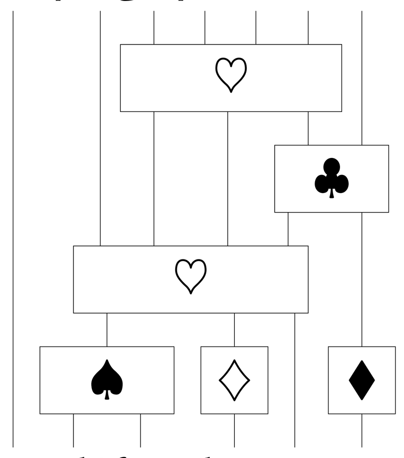
Les prographes sont définis à partir de briques élémentaires appelées *générateurs*. Un générateur est une boîte munie d'entrées et de sorties. Par exemple :



Plus généralement, on représente un générateur g à e entrées et s sorties par :



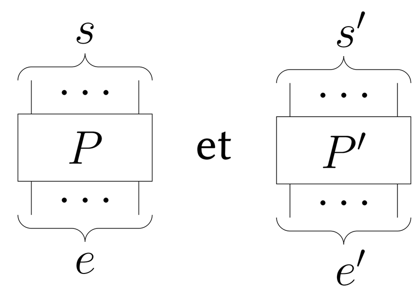
On peut combiner des générateurs afin d'obtenir des assemblages nommés *prographes* :



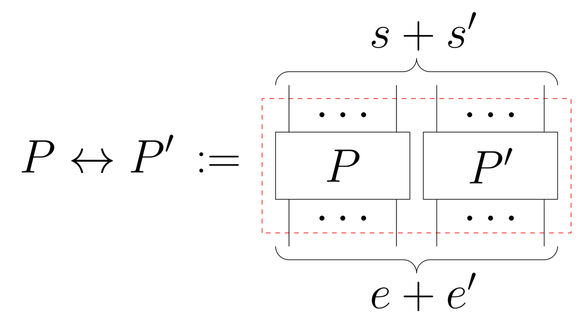
(1)

Plus formellement, on définit les prographes par la grammaire récursive suivante :

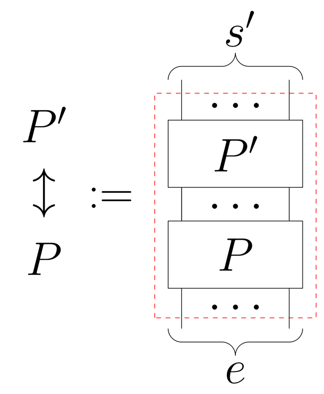
- Un générateur à e entrées et s sorties est un prographe à e entrées et s sorties,
- Le fil | est un prographe à une entrée et une sortie,
- Étant donnés deux prographes



l'assemblage



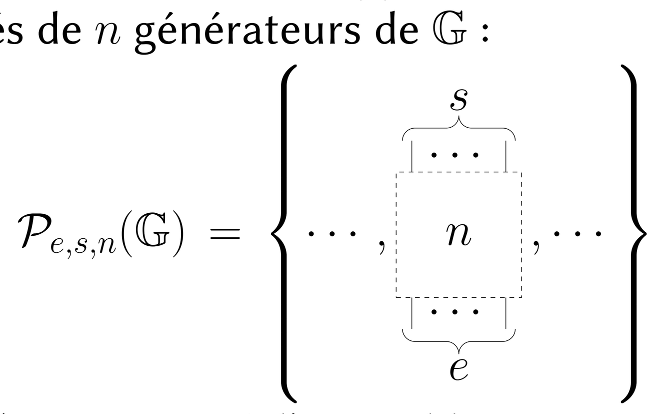
est un prographe à $e + e'$ entrées et $s + s'$ sorties ; si $s = e'$ alors l'assemblage



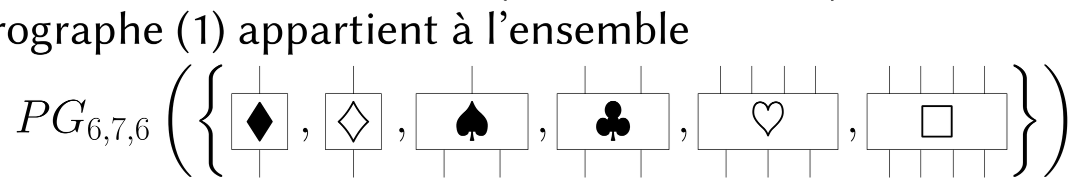
est un prographe à e entrées et s sorties.

Problème

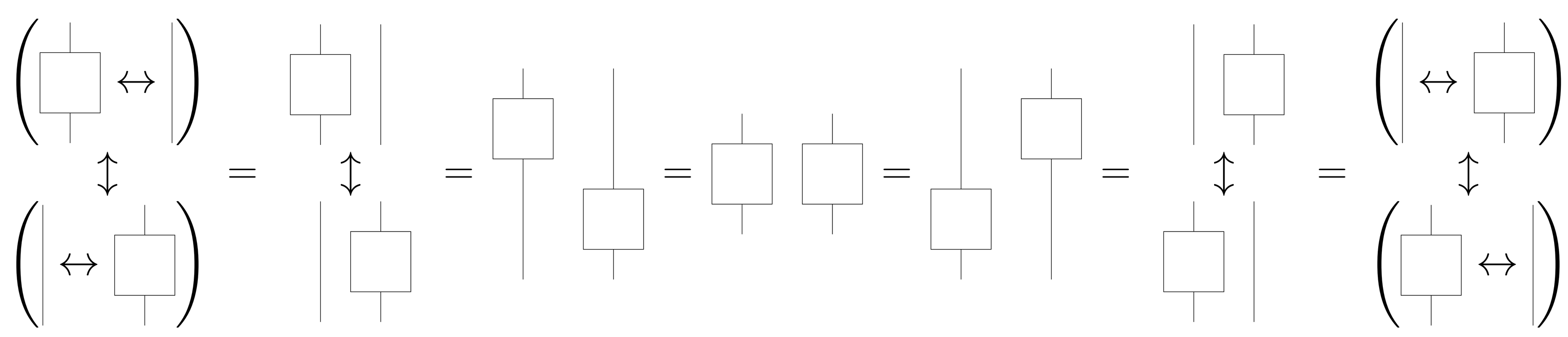
Soit un ensemble de générateurs $\mathbb{G}$, on note $\mathcal{P}_{e,s,n}(\mathbb{G})$ l'ensemble des prographes à e entrées, s sorties et composés de n générateurs de $\mathbb{G}$:



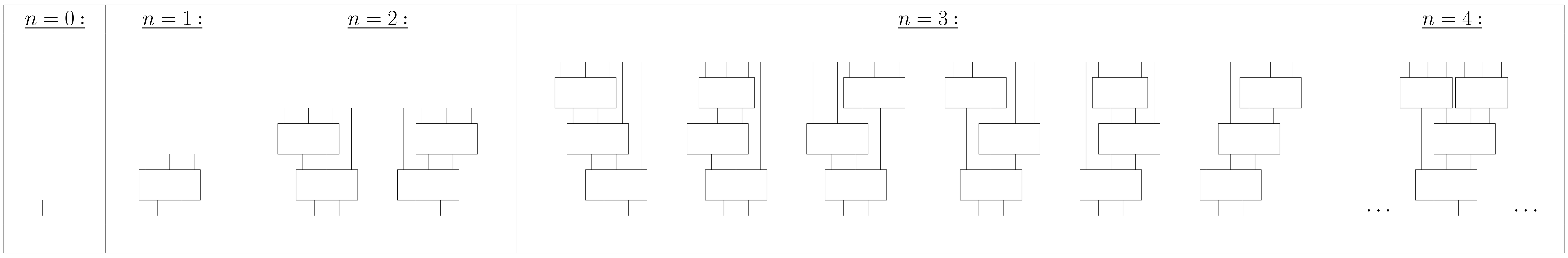
Par exemple, le prographe (1) appartient à l'ensemble



Notre but est de dénombrer l'ensemble $\mathcal{P}_{e,s,n}(\mathbb{G})$, selon les paramètres e, s, n et $\mathbb{G}$. La principale difficulté provient de l'ambiguïté de la grammaire définissant les prographes. En effet :



Exemple de dénombrement : $\mathcal{P}_{2,n+2,n}$

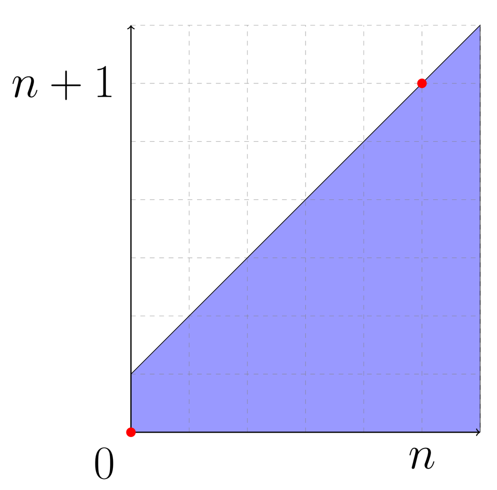


Nous obtenons la suite : $1, 1, 2, 6, 22, 92, 420, \ldots$ **Remarque :** elle est identique à la suite du nombre d'arbres de duplications en tandem sur n gènes [biologie].

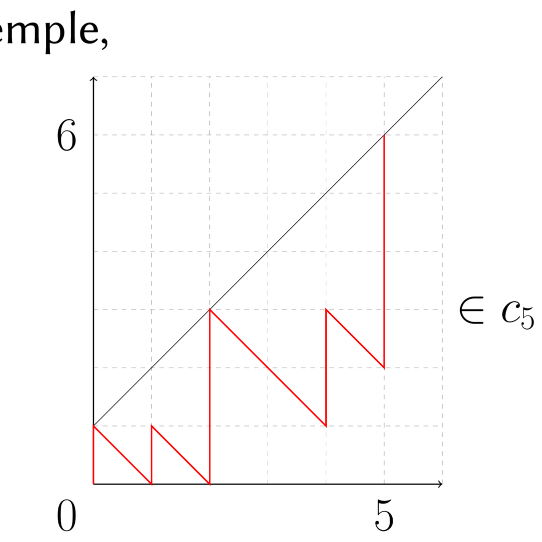
Bijection entre les prographes et des chemins combinatoires

Définition de nos chemins combinatoires, notés c_n :

Les chemins de $(0,0)$ à $(n, n+1)$, n'utilisant que les pas | et \ et restant dans la zone

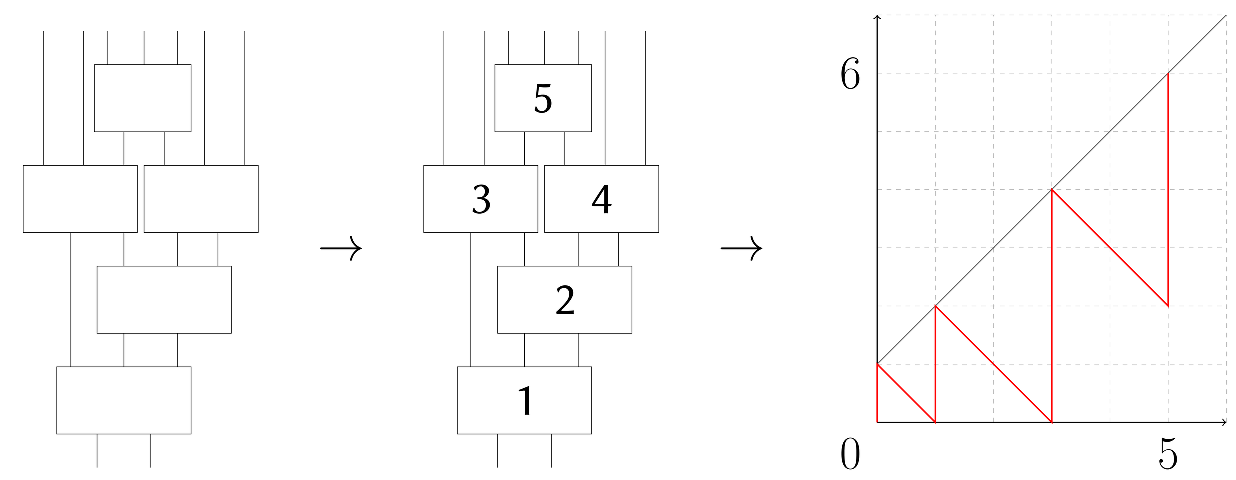


Par exemple,



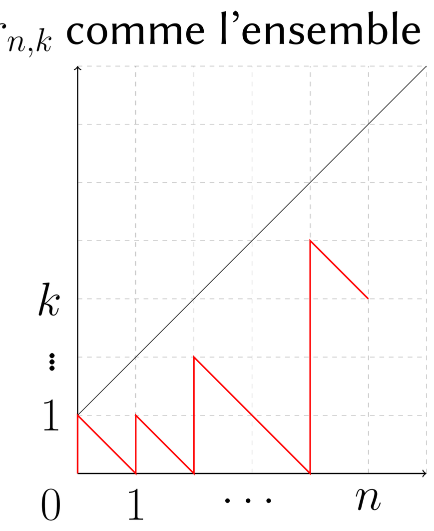
Notre bijection est composée de deux étapes :

- On numérote les générateurs par un parcours en profondeur gauche-droite,
- Si le générateur i à k fils à sa gauche alors on place $k + 1$ pas | et un pas \.



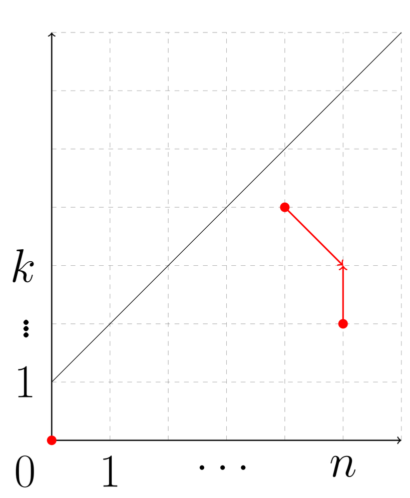
Formule de récurrence

Nous définissons $r_{n,k}$ comme l'ensemble des chemins :



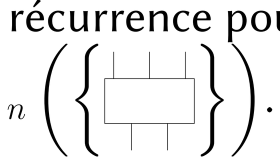
Il s'agit d'un raffinement de l'ensemble c_n, car $r_{n,n+1} = c_n$.

On remarque que $r_{n,k} = r_{n-1,k+1} \sqcup r_{n,k-1}$:



On en déduit que

$$|r_{n,k}| = \begin{cases} 1 \text{ si } n = k = 0, \\ |r_{n,k-1}| + |r_{n-1,k+1}| \text{ si } n \geq 0 \text{ et } 0 \leq k \leq n+1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une formule de récurrence pour dénombrer les prographes de $\mathcal{P}_{2,n+2,n}$ .

Journées Nationales du *GDR Informatique Mathématique* du 3 au 6 avril 2018 à l'École Polytechnique, Palaiseau, France.