Erreurs des modèles compressible et incompressible issus de la méthode de Boltzmann appliqués à l'écoulement de Poiseuille pulsé

Guillaume Charpiat

Exposé de cursus mixte sous la direction de

Cécile Appert
et
Dominique D'Humières

11 septembre 2001

Introduction

Les modèles mis au point pour simuler par ordinateur l'écoulement des fluides sont de deux types : compressible ou incompressible. Le modèle compressible est utilisé par exemple en aérodynamique ; le modèle incompressible, plus récent et moins précis, en hydrodynamique. À cause de ce manque de précision, les deux types de modèles sont couramment utilisés pour des fluides incompressibles. Ce rapport présente deux modèles en particulier dans le but de les comparer et de déterminer une zone de validité pour chacun d'eux.

1 Présentation et justification des modèles

1.1 Modélisation utilisée

1.1.1 Rappels de mécanique des fluides

On se place ici dans le cadre de fuides en deux dimensions.

L'équation de Navier-Stokes, pour un fluide de viscosité ν, de densité ρ, de champ de vitesse $\vec{u}$ et de distribution de pression P, sous un forçage $\vec{g}(t)$, est :

$$\partial_t(\rho u_\alpha) + \sum_\beta \partial_\beta(\rho u_\alpha u_\beta) = -\partial_\alpha(P) + \nu\Delta(\rho u_\alpha) + \rho g_\alpha$$

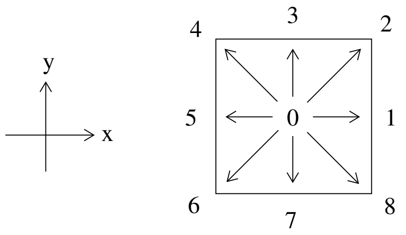
à laquelle il convient de rajouter l'équation de conservation de la masse :

$$\partial_t \rho + \sum_\beta \partial_\beta(\rho u_\beta) = 0$$

où α et β sont des indices de direction (x et y). Pour les fluides compressibles, on pose $P = c_s^2\rho$, où c_s est la vitesse du son, et pour les fluides incompressibles, l'on a bien entendu la condition supplémentaire $\rho = \rho_0 = c^{ste}$. Par la suite, on notera $\rho = P/c_s^2$, c'est-à-dire que ρ désignera effectivement la densité quand il s'agira d'un fluide compressible, mais ne sera qu'un indicateur de la pression dans le cas d'un fluide incompressible (de densité uniforme et constante ρ_0).

1.1.2 Discrétisation

On discrétise le temps et l'espace. Dans toute la suite, les unités de temps et de longueur seront celles de la discrétisation. On considère un écoulement dans un canal rectangulaire, modélisé par un réseau rectangulaire de L_x sur L_y sites. Dans chaque cellule du réseau, les particules sont distribuées suivant neuf directions fixées (d'où le nom de réseau D_2Q_9), ces neuf directions étant indiquées sur la figure suivante.



Numérotation des directions

On note $N_i(x, y, t)$ le nombre de particules dans la cellule (x, y) suivant la direction i à l'instant t, et $\vec{c_i}$ la vitesse correspondant au déplacement suivant la direction i du centre d'une cellule à un autre en un pas de temps, avec $c_{i\alpha} \in \{-1; 0; 1\}$. Dès lors, dans un modèle simple, à chaque pas de temps et pour chaque cellule, on aurait les relations "intuitives" :

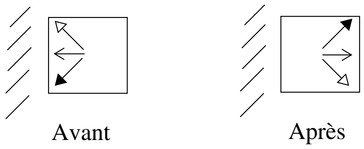
$$\sum_i N_i(x, y, t) = \rho(x, y, t)$$

$$\sum_i N_i c_{i\alpha} = \rho u_\alpha$$

$$\sum_i N_i c_{i\alpha} c_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta} c_s^2 \rho + \rho u_\alpha u_\beta$$

En fait, ces relations sont légèrement différentes dans les modèles étudiés ici.

Le passage à l'instant suivant consiste en une phase de redistribution des particules au sein de chaque cellule (la collision) et une phase d'échange avec les cellules voisines (la propagation). La collision fait intervenir une distribution d'équilibre $N_i^{eq}(x, y)$ qui correspond entre autres à la distribution finale sur un plan infini composé initialement de cellules identiques à la cellule (x, y). C'est précisément le choix de cette distribution d'équilibre qui détermine le comportement du fluide. La propagation, quant à elle, se fait selon les règles suivantes : dans le cas général, on attribue la nouvelle valeur de $N_i(\vec{x}, t)$ à $N_i(\vec{x} + \vec{c_i}, t + 1)$. Comme on modélise un canal, de bords $x = 1$ et $x = L_x$, on introduit les conditions de rebond décrites par la figure ci-dessous :



Rebond sur les parois verticales lors de la propagation

Les conditions de rebond déterminent, avec la viscosité du fluide, la position effective de la paroi.

Les deux modèles (compressible et incompressible) peuvent se décliner sous deux formes : avec accélération ou avec pression. Les modèles avec accélération concernent par exemple les fluides magnétiques ou soumis à la gravité ; on considérera ici une condition de bord périodique selon y, c'est-à-dire que l'entrée du canal sera confondue avec la sortie. Les modèles avec pression imposent les variations de la pression à l'entrée et la sortie du canal ; des conditions particulières seront appliquées à ces extrémités.

1.2 Modèle compressible avec accélération

Afin de mieux comprendre comment l'on construit et vérifie théoriquement les modèles, développons le cas particulier du modèle compressible avec accélération.

1.2.1 Recherche de N_i^{eq}

On cherche à simuler l'équation d'Euler avec forçage volumique :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \sum_\alpha \partial_\alpha(\rho u_\alpha) = 0 \\ \partial_t(\rho u_\alpha) + \sum_\beta \partial_\beta(\rho u_\alpha u_\beta) = -c_s^2 \partial_\alpha \rho + \rho a_\alpha \end{cases}$$

Des considérations provenant de précédents modèles incitent à modifier la deuxième relation vérifiée par les N_i :

$$\sum_i N_i \vec{c_i} = \rho \vec{u} - \rho \frac{\vec{a}}{2}$$

On cherche N_i^{eq} sous la forme d'un développement

$$N_i^{eq} = \rho \omega_i (1 + a_1 \vec{u} \cdot \vec{c_i} + b_1 \vec{a} \cdot \vec{c_i} + a_2 (\vec{u} \cdot \vec{c_i})^2 + a_3 \vec{u}^2)$$

avec, pour raisons de symétrie, $\omega_1 = \omega_3 = \omega_5 = \omega_7$ et $\omega_2 = \omega_4 = \omega_6 = \omega_8$.

N_i^{eq} doit vérifier les mêmes relations que N_i, puisque la collision ne consiste qu'en une redistribution de particules interne à chaque cellule. On se servira des relations ci-dessous :

$$\begin{cases} \sum_i \omega_i c_{i\alpha} = 0 \\ \sum_i \omega_i c_{i\alpha} c_{i\beta} = 2(\omega_1 + 2\omega_2) c^2 \delta_{\alpha\beta} \\ \sum_i \omega_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} = 0 \\ \sum_i \omega_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta} = 4\omega_2 c^4 (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) + 2c^4(\omega_1 - 4\omega_2)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\delta} \end{cases}$$

La relation sur la masse $\displaystyle\sum_i N_i^{eq} = \rho$ donne, en sommant sur i :

$$\rho \left(\sum_i \omega_i \right) + \rho \vec{u}^2 \left[2 a_2 c^2 (\omega_1 + 2\omega_2) + a_3 \left(\sum_i \omega_i \right) \right] = \rho \quad \text{pour tout } \vec{u}$$

d'où

$$\begin{cases} \sum_i \omega_i = 1, \quad \text{c'est-à-dire } \omega_0 + 4(\omega_1 + \omega_2) = 1 \\ a_3 = -2 a_2 c^2 (\omega_1 + 2\omega_2) \end{cases}$$

La relation sur l'impulsion $\displaystyle\sum_i N_i^{eq} c_{i\alpha} = \rho u_\alpha - \rho \frac{a_\alpha}{2}$ donne :

$$2c^2(\omega_1 + 2\omega_2)(a_1 u_\alpha + b_1 a_\alpha) = u_\alpha - \frac{a_\alpha}{2}$$

d'où
$$a_1 = \frac{1}{2c^2(\omega_1 + 2\omega_2)} \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{-1}{4c^2(\omega_1 + 2\omega_2)}$$

Enfin, la relation sur l'énergie cinétique $\sum_i N_i^{eq} c_{i\alpha} c_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta} c_s^2 \rho + \rho u_\alpha u_\beta$ donne, après regroupement des termes :

$$\left(\left[2(\omega_1 + 2\omega_2)c^2 - c_s^2\right] + \vec{u}^2 \left[4a_2\omega_2 c^4 + 2a_3(\omega_1 + 2\omega_2)c^2\right] + 2u_\alpha^2 a_2 c^4 \left[\omega_1 - 4\omega_2\right]\right) \delta_{\alpha\beta}$$
$$+ u_\alpha u_\beta \left[8a_2\omega_2 c^4 - 1\right] = 0$$

pour tout $\vec{u}$ et tout α, β, d'où

$$\begin{cases} a_2\omega_2 = \frac{1}{8c^4} \\ \omega_1 = 4\omega_2 \\ 2a_2\omega_2 c^2 = -2a_3(\omega_1 + 2\omega_2) \\ c_s^2 = 2(\omega_1 + 2\omega_2)c^2 \end{cases}$$

En réunissant toutes les équations obtenues, on conclut :

$$\begin{cases} \omega_0 = 4/9 \quad \omega_1 = 1/9 \quad \omega_2 = 1/36 \\ c_s^2 = c^2/3 \\ a_1 = \frac{1}{c_s^2} \qquad a_2 = \frac{1}{2c_s^4} \qquad b_1 = a_3 = \frac{-1}{2c_s^2} \end{cases}$$

On a donc, en prenant $c = 1$, $N_i^{eq} = \rho\omega_i \left(1 + 3(\vec{u}\cdot\vec{c_i}) - \frac{3}{2}(\vec{a}\cdot\vec{c_i}) + \frac{9}{2}(\vec{u}\cdot\vec{c_i})^2 - \frac{3}{2}\vec{u}^2\right)$.

1.2.2 Validité de la modélisation

Il est assez naturel d'exprimer l'équation d'évolution, résumant collision et propagation, sous la forme :

$$N_i(\vec{x} + \vec{c_i}, t+1) = N_i(\vec{x}, t) + \frac{1}{\tau}\left[N_i^{eq}(\vec{x}, t) - N_i(\vec{x}, t)\right] + F_i$$

où τ est un temps de relaxation et F_i un terme exprimant la force exercée. Les calculs suivants incitent à considérer la forme simple : $F_i = \frac{\rho\omega_i}{c_s^2}(\vec{a}\cdot\vec{c_i})$.

Pour se ramener à l'équation d'Euler, on introduit des échelles : on pose $u = O(\eta)$ et $\partial_t = O(\varepsilon), \partial_\alpha = O(\varepsilon)$. On a ainsi $a = O(\varepsilon\eta)$. On suppose également que les variations de ρ sont en $O(\eta)$, c'est-à-dire que l'on peut écrire $\rho = \rho_0 + \eta\rho_1$ avec $\rho_1 = O(1)$.

On développe :

$$\begin{aligned} \Delta N_i &= N_i(\vec{x} + \vec{c_i}, t+1) - N_i(\vec{x}, t) \\ &= \partial_t N_i + \sum_\alpha c_{i\alpha}\partial_\alpha N_i + \frac{1}{2}\partial_{tt}^2 N_i + \sum_\alpha c_{i\alpha}\partial_t\partial_\alpha N_i + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} c_{i\alpha}c_{i\beta}\partial_\alpha\partial_\beta N_i + O(\varepsilon^3\eta) \end{aligned}$$

Pour obtenir les relations souhaitées, on procède par étapes. Vérifions la conservation de la masse. En sommant sur i, on exprime $\sum_i \Delta N_i$:

$$\partial_t\rho+\sum_\alpha \partial_\alpha\rho u_\alpha-\frac{1}{2}\sum_\alpha \partial_\alpha\rho a_\alpha+\frac{1}{2}\partial^2_{tt}\rho+\sum_\alpha \partial_t\partial_\alpha\rho u_\alpha-\frac{1}{2}\sum_\alpha \partial_t\partial_\alpha\rho a_\alpha+\frac{c_s^2}{2}\Delta\rho+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\rho u_\alpha u_\beta+O(\varepsilon^3\eta)$$

D'autre part, en utilisant l'équation d'évolution, on obtient : $\sum_i \Delta N_i = 0$. On voudrait $\partial_t\rho + \sum_\alpha \partial_\alpha\rho u_\alpha \simeq 0$ à l'ordre le plus précis possible. On a immédiatement $\partial_t\rho + \sum_\alpha \partial_\alpha\rho u_\alpha = O(\eta\varepsilon^2)$ à l'aide de la relation précédente. On réexprime ensuite $\partial_t\rho + \sum_\alpha \partial_\alpha\rho u_\alpha$ en regroupant astucieusement les termes :

$$\frac{-1}{2}\partial_t\left[\partial_t\rho+\sum_\alpha \partial_\alpha\rho u_\alpha\right]-\frac{1}{2}\sum_\alpha\partial_\alpha\left[\partial_t\rho u_\alpha+\sum_\beta\partial_\beta\rho u_\alpha u_\beta+\partial_\alpha c_s^2\rho-\rho a_\alpha\right]+O(\varepsilon^3\eta)$$

d'où, puisque le premier crochet est en $O(\eta\varepsilon^2)$,

$$\partial_t\rho+\sum_\alpha \partial_\alpha\rho u_\alpha=-\frac{1}{2}\sum_\alpha\partial_\alpha\left[\partial_t\rho u_\alpha+\sum_\beta\partial_\beta\rho u_\alpha u_\beta+\partial_\alpha c_s^2\rho-\rho a_\alpha\right]+O(\varepsilon^3\eta)$$

Le terme entre crochets n'est autre que la variation d'impulsion. Afin de vérifier la conservation de l'impulsion, on exprime $\sum_i \Delta N_i c_{i\alpha}$:

$$(\partial_t+\frac{1}{2}\partial^2_{tt})\left[\rho u_\alpha-\frac{1}{2}\rho a_\alpha\right]+(1+\partial_t)\left[\partial_\alpha c_s^2\rho\right]+\sum_\beta\partial_\beta\rho u_\alpha u_\beta$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\partial_\beta\partial_\gamma\rho c_s^2(u_\alpha\delta_{\beta\gamma}+u_\beta\delta_{\alpha\gamma}+u_\gamma\delta_{\alpha\beta})-\tau c_s^2\sum_\beta\partial_\beta(\partial_\alpha\rho u_\beta+\partial_\beta\rho u_\alpha)+O(\varepsilon^3\eta+\varepsilon^2\eta^2)$$

Comme l'équation d'évolution nous donne : $\sum_i \Delta N_i c_{i\alpha} = \sum_i F_i c_{i\alpha}$, qui vaut ρa_α, on en déduit :

$$\partial_t\rho u_\alpha+\sum_\beta\partial_\beta\rho u_\alpha u_\beta=-\partial_\alpha c_s^2\rho+\rho a_\alpha+O(\varepsilon^2\eta)$$

On a retrouvé l'équation d'Euler. Réinjectée dans l'expression de la variation de la masse, elle implique :

$$\partial_t\rho+\sum_\alpha\partial_\alpha\rho u_\alpha=O(\varepsilon^3\eta)$$

La conservation de la masse est donc assurée a un ordre assez élevé. Mais on peut encore travailler l'expression de la variation de l'impulsion. On réexprime $\partial_t\rho u_\alpha + \sum_\beta \partial_\beta\rho u_\alpha u_\beta + \partial_\alpha c_s^2\rho - \rho a_\alpha$ en regroupant les termes de cette façon :

$$\frac{-1}{2}\partial_t\left[\partial_t\rho u_\alpha+\partial_\alpha c_s^2\rho-\rho a_\alpha\right]-\frac{c_s^2}{2}\partial_\alpha\left[\partial_t\rho+\sum_\beta\partial_\beta\rho u_\beta\right]+c_s^2(\tau-\frac{1}{2})\sum_\beta\partial_\beta(\partial_\alpha\rho u_\beta+\partial_\beta\rho u_\alpha)+O(\varepsilon^3\eta+\varepsilon^2\eta^2)$$

On reconnaît les termes entre crochets. On a vu que le premier est en $O(\varepsilon^2\eta+\varepsilon\eta^2)$ et le deuxième en $O(\varepsilon^3\eta)$, on peut donc les négliger. On peut donc finalement écrire :

$$\partial_t\rho u_\alpha+\sum_\beta\rho u_\alpha u_\beta=-\partial_\alpha c_s^2\rho+c_s^2(\tau-\frac{1}{2})\sum_\beta\partial_\beta(\partial_\alpha\rho u_\beta+\partial_\beta\rho u_\alpha)+\rho a_\alpha+O(\varepsilon^3\eta+\varepsilon^2\eta^2)$$

Si l'on impose $\tau = 3\nu - \frac{1}{2}$, on retrouve l'équation de Navier-Stokes, mais avec un terme supplémentaire. Le modèle est valide.

1.3 Autres modèles

Le modèle incompressible avec accélération part sur des bases légèrement différentes :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_i N_i(x,y,t) = \rho(x,y,t) \\ \sum_i N_i c_{i\alpha} = \rho_0(u_\alpha - \frac{1}{2}a_\alpha) \\ \sum_i N_i c_{i\alpha} c_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta} c_s^2 \rho + \rho_0 u_\alpha u_\beta \end{array}\right.$$

Ceci conduit au choix de N_i^{eq} suivant :

$$N_i^{eq} = \omega_i \left(\rho + \rho_0 \left[\frac{3}{c^2}(\vec{c_i} \cdot \vec{u}) + \frac{9}{2c^4}(\vec{c_i} \cdot \vec{u})^2 - \frac{3}{2c^2}\vec{u}^2 \right] \right)$$

pour les mêmes valeurs des ω_i et de c_s que précédemment. On retrouve les équations de conservation de la masse et de l'impulsion pour un fluide incompressible aux mêmes ordres de grandeurs que pour le modèle compressible.

Les modèles avec pression consistent à imposer la pression et ses variations aux bords du canal, au lieu de distribuer un forçage volumique sur l'ensemble du réseau. Pour ce faire, on utilise les mêmes algorithmes que précédemment, en éliminant tous les termes d'accélération et en ajoutant un contrôle aux bords du canal. Les variations imposées de ρ aux bords impliquent de façon générale des fluctuations de ρ plus grandes que dans les modèles avec accélération uniforme, mais ces modèles correspondent a priori mieux aux usages pratiques en hydrodynamique.

2 Résultats

Afin de situer les erreurs induites par les différents modèles, on les teste avec des écoulements dont on connaît la solution théorique.

2.1 Résultats théoriques

2.1.1 Écoulement de Poiseuille

La solution théorique de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide (compressible ou non) de viscosité ν, de densité ρ et de champ de vitesse $\vec{u}$, avec forçage constant $g_x = 0$ et $g_y = c^{ste}$, pour des conditions limites périodiques selon y et de rebond selon x (écoulement de Poiseuille dans un canal de largeur L), est donnée par :

$$\rho = c^{ste} = \rho_0,\ u_x = 0 \text{ et } u_y(x,y) = \frac{1}{2}\frac{g_y}{\nu}x(L-x)$$

On a donc une densité uniforme et constante, et un profil de vitesse parabolique, invariant selon y. La vitesse maximale est alors atteinte en $x = L/2$, et vaut $U_{max} = \frac{1}{4}\frac{g_y}{\nu}L^2$. En particulier, U_{max} est proportionnelle au forçage g_y.

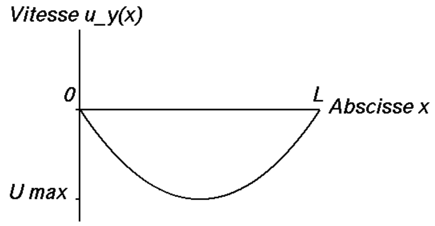


Fig 1. Profil générique d'un écoulement de Poiseuille.

2.1.2 Écoulement de Poiseuille pulsé

L'écoulement de Poiseuille pulsé d'un fluide incompressible, c'est-à-dire pour un forçage $g_x = 0, \quad g_y = A\,cos(\omega t)$, a lui pour solution :

$$u_x = 0,\ u_y = -Re\left(\frac{Ai}{\omega}e^{i\omega t}\left(1 - \frac{cos\left(\lambda(\frac{2x}{L}-1)\right)}{cos\lambda}\right)\right),\ \text{où } \lambda^2 = -i\frac{L^2\omega}{4\nu}.$$

Le profil de vitesse, symétrique selon l'axe du canal $x = L/2$, invariant selon y et périodique en temps, dépend qualitativement du nombre de Womersley $\alpha = \sqrt{\frac{L^2\omega}{4\nu}}$. Pour des valeurs faibles ($\alpha << 1$), le profil de vitesse est approximativement parabolique (résultat que l'on peut obtenir par développement limité au premier ordre en α de l'expression précédente). Son allure pour des valeurs moyennes de α (ici, pour $\alpha = 5$) est donnée par les graphes ci-dessous :

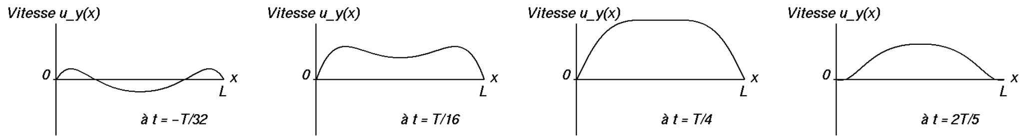


Fig 2. Profils caractéristiques de l'écoulement de Womersley.

La vitesse est toujours nulle sur les bords du canal (par hypothèse). Le maximum du module de la vitesse $U_{max} = \max_{x,t}|\vec{u}(x,t)|$ n'est pas nécessairement atteint en $x = L/2$. Au contraire, pour des valeurs élevées de α ($\alpha >> 1$), il est atteint près des bords du canal. U_{max} est proportionnelle à l'amplitude A du forçage, globalement inversement proportionnelle à ω. À pulsation ω et amplitude de forçage A constantes, U_{max} varie selon α suivant la courbe ci-dessous. En particulier, $\lim_{\alpha\to\infty} U_{max} = A/\omega$.

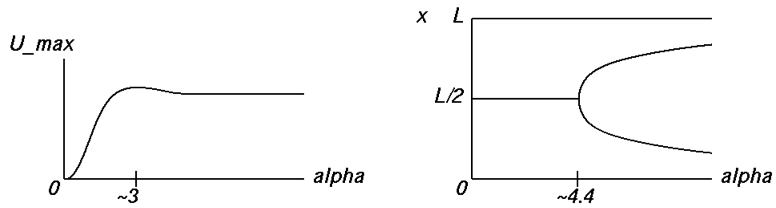


Fig 3. Vitesse maximale en fonction de α à ω constant et abscisses où elle est atteinte.

La transformée de Fourier temporelle de $u_y(x,t)$ est réduite au fondamental. Son amplitude (qui n'est autre que la vitesse maximale atteinte) et sa phase selon x ont l'allure ci-dessous :

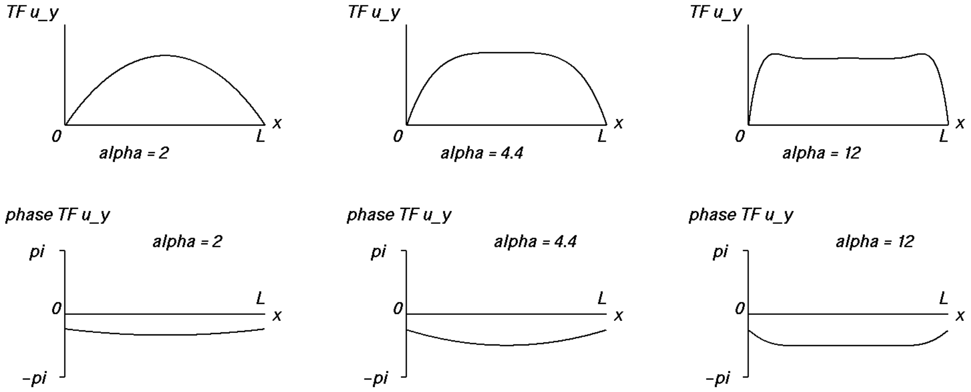


Fig 4. Amplitudes et phases du fondamental de la transformée de Fourier temporelle du champ de vitesse $u_y(x,t)$ pour différentes valeurs de α. Le retard relatif du centre du canal par raport aux bords (pour $\alpha > 4.4$) est d'autant plus marqué que α est grand.

2.2 Résultats numériques des modèles avec accélération

On relève ici l'écart des deux modèles avec accélération sur les écoulements, où le forçage est uniforme sur l'ensemble des sites. Le forçage et les conditions initiales ne dépendant pas de y, et les conditions aux bords selon y étant périodiques, on conçoit (et on vérifie en pratique) que les résultats non plus ne dépendent pas de y. Par conséquent, dans toutes les simulations, la longueur du canal ($L_y = 5$) ne sera pas mentionnée. Par ailleurs, la densité choisie est $\rho_0 = 0.45$.

2.2.1 Écoulement de Poiseuille

La première difficulté dans l'interprétation des résultats numériques concernant l'écoulement de Poiseuille consiste à situer précisément les bords du canal. En effet le profil de vitesse que l'on obtient ne s'annule pas, de façon générale, sur le premier et le dernier site de la simulation. Pour déterminer la largeur effective D_{eff} du canal, on approxime (par exemple ici par la méthode des moindres carrés) le profil de vitesse obtenu par une parabole, et l'on relève la distance entre les deux racines de cette interpolation. La largeur effective du canal et la viscosité ν du fuide étant explicitement reliées par la théorie, on peut vérifier la convergence de D_{eff} vers sa valeur théorique. L'on a en effet, si l'on nomme $D^2_{1/2}$ la distance entre le premier et le dernier site sur une largeur du canal :

$$D^2_{\mathit{eff\ th\acute{e}orique}} = D^2_{1/2} + 48\nu^2 - 1 \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{6}(2\tau - 1)$$

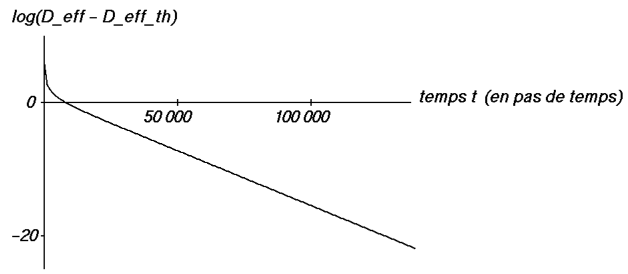


Fig 5. Convergence temporelle de D_{eff} vers $D_{\mathit{eff}\ th\acute{e}orique}$ pour le modèle compressible, avec des conditions initiales de densité uniforme et de vitesse nulle. La pente du logarithme népérien est (ici, pour une largeur de 100 sites et $\tau = 1$) d'environ $-1/6000$, ce qui signifie que l'on gagne une décimale dans la précision de D_{eff} tous les 14000 pas. La convergence est d'autant plus rapide que la viscosité ν est élevée et la largeur du canal réduite.

Regardons maintenant le comportement de la densité $\rho(x, y)$, initialement uniforme, et supposée le rester. Le type de modèle utilisé (compressible ou incompressible) ne semble pas affecter l'erreur sur la densité.

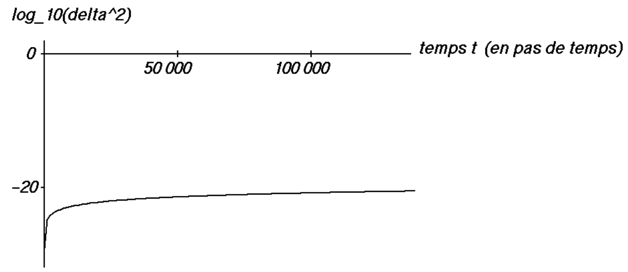


Fig 6. Logarithme décimal de l'erreur sur la densité $\delta^2 = \sum_{x,y} (\rho(x, y) - \rho_0)^2$ pour les mêmes conditions que précédemment. Elle augmente avec le temps pour finalement se stabiliser autour de l'ordre de 10^{-20} ; elle probablement dûe à des erreurs d'arrondis de la machine. Elle varie peu avec les divers paramètres d'inialisation.

Cette erreur résiduelle sur la densité, peu dépendante des paramètres initiaux et du modèle, explique l'équivalence des deux modèles pour l'écoulement de Poiseuille.

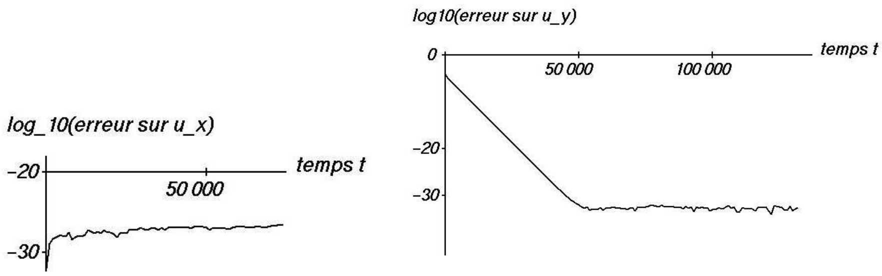


Fig 7. Logarithme décimal de l'erreur sur u_x : $\sum_{x,y} u_x(x, y)^2$ et de celle sur u_y, pour les mêmes conditions que précédemment. L'erreur reste assez faible pour que l'on puisse penser qu'elle soit dûe uniquement aux limitations de l'ordinateur.

Dans les deux cas, la composante selon x de la vitesse $u_x(x, y)$ (qui théoriquement est nulle) se comporte comme un bruit dont l'amplitude croît avec la largeur du canal et $1/\tau$. La composante $u_y(x, y)$, initialement nulle, converge exponentiellement vers sa valeur théorique puis se couvre d'un bruit similaire à celui de u_x.

On observe donc ici une très bonne convergence (exponentielle), limitée uniquement par les capacités de l'ordinateur et équivalente pour les deux modèles, sur un écoulement stationnaire.

2.2.2 Écoulement de Poiseuille pulsé

Le problème de situer précisément les bords du canal est maintenant plus complexe puisque le profil de vitesse varie au cours du temps et ne s'approxime pas par une simple parabole. Pour simplifier, on choisira, dans toutes les simulations qui suivent, le temps de relaxation τ tel que $D_{\textit{eff}} = D_{1/2}$, en supposant que la relation précédemment énoncée reste valide dans ce cas précis. On choisit donc $\nu = 1/4\sqrt{3}$, soit $\tau \simeq 0.933$. Par ailleurs, les conditions initiales seront les suivantes : densité uniforme et vitesse uniformément nulle.

Vérifions tout d'abord la stabilité de la densité.

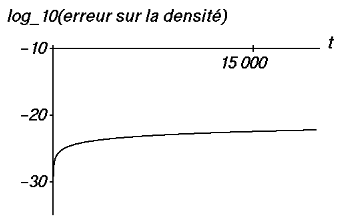


Fig 8. Logarithme décimal de l'erreur sur la densité $\sum_{x,y}(\rho(x,y) - \rho_0)^2$, pour le modèle compressible, avec une largeur de 100 sites, une amplitude de forçage $A = 0.001$ et une pulsation $\omega = 0.005$. On s'aperçoit, que, comme dans le cadre de l'écoulement de Poiseuille simple, l'erreur est de l'ordre de 10^{-20}, et que les divers paramètres d'initialisation n'influent pas sur la courbe (même pour des conditions extrêmes où l'on fait varier A ou ω d'un facteur 100). On observe la même chose pour les deux modèles.

Intéressons-nous maintenant à l'erreur sur la vitesse. L'erreur sur la composante u_x est un bruit de faible amplitude (10^{-20} pour les conditions de la figure 8), croissante avec celle du forçage. L'erreur sur u_y a un comportement plus remarquable.

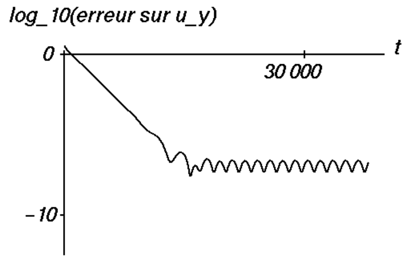


Fig 9. Logarithme décimal de l'erreur sur u_y : $\sum_{x,y} u_y(x,y)^2$ pour le modèle compressible, avec une largeur de 50 sites, une amplitude de forçage $A = 0.001$ et une pulsation $\omega = 0.002$. Les oscillations observées ont une amplitude de l'ordre de 10^{-7} et pour pulsation 2ω. Ceci correspond à 3 digits exacts en moyenne sur une mesure $u_y(x, y)$ quelconque.

L'erreur relative sur la mesure de u_y en un point particulier (x, y) est quasiment indépendante de la largeur du canal. Etudions la dépendance en A et en ω de l'erreur totale sur u_y.

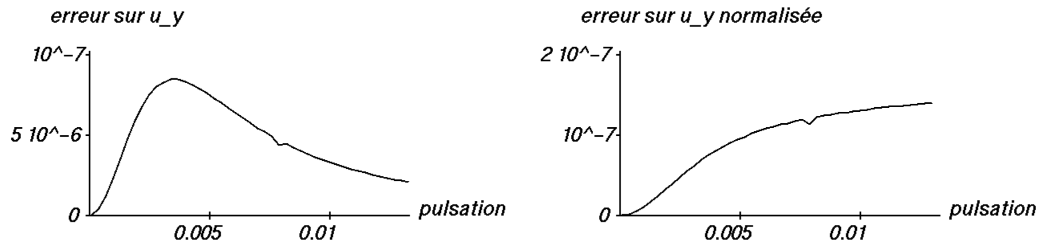


Fig 10. Variations de l'erreur sur la vitesse en fonction de ω (à $A = 0.001$), pour une largeur de 20 sites. Dans le premier graphe, le maximum est atteint en $\omega \simeq 0.0035$ et vaut $3.4\,10^{-7}$. On observe les mêmes erreurs dans les deux modèles. L'erreur normalisée par le nombre de sites et la vitesse maximale $\frac{\sum_{x,y} u_y(x,y)^2}{U_{max}^2(\text{nombre de sites})}$ augmente avec ω. Pour ω grand ($\omega > 0.1$), la dépendance devient linéaire.

En revanche, l'accélération n'influe absolument pas sur l'erreur normalisée : celle-ci reste la même (à ω fixé) quand l'on fait varier A de 10^{-5} à 10. L'erreur semble donc provenir non pas de l'amplitude de la vitesse mais de différences de phase (ce qui d'ailleurs est suggéré par les oscillations apparues sur la figure 9). On pourrait intuiter alors que l'erreur ne dépend que de α, puisque c'est le terme dans l'expression de la solution de l'écoulement de Womersley qui régit la phase et dans lequel apparait ω. Pour tester cette assertion, comme $\alpha = \sqrt{\frac{L^2\omega}{4\nu}}$, on étudie les variations de l'erreur normalisée avec la largeur du canal en faisant varier le nombre de sites. On s'aperçoit que l'erreur normalisée augmente trop faiblement avec le nombre de sites pour valider l'hypothèse précédente (il aurait fallu que multiplier par 2 la largeur du canal revienne à multiplier ω par 4). Par contre, un phénomène lié à la discrétisation apparait : l'erreur normalisée augmente quand le nombre de sites diminue, et explose pour des valeurs trop faibles de celui-ci (quelques unités). Mais là encore, dans ces conditions extrêmes, les deux modèles donnent des résultats identiques.

Afin d'analyser au mieux l'erreur sur la vitesse u_y, puisque celle-ci semble périodique en temps, considérons la transformée de Fourier (temporelle) de la vitesse $u_y(x, y)$ (Fig. 11). Le profil spatial de l'erreur reflète plus ou moins celui de la solution théorique. On vérifie, comme précédemment, que l'amplitude de l'erreur est essentiellement liée à ω, voire proportionnelle à ω pour $\omega > 0.1$. Par ailleurs, les erreurs commises sur les harmoniques sont les mêmes quelque soit le degré de l'harmonique, et leur amplitude est de deux ordres de grandeur en dessous de celle sur le fondamental. Les erreurs sur les harmoniques sont donc probablement dûes au calcul de la transformée lui-même.

L'essentiel de l'erreur est sur le fondamental, comme on pouvait s'en douter au vu de la figure 9. L'erreur, étant commune au deux modèles, ne permet pas d'apprécier les apports du modèle incompressible. Comparons cependant l'ordre de grandeur de l'erreur avec celui trouvé théoriquement dans la première partie. On avait posé $u = O(\eta)$ et $\partial_t = O(\varepsilon)$, $\partial_\alpha = O(\varepsilon)$. Comme $U_{max} \simeq A/\omega$ et que le temps caractéristique du système est $1/\omega$, on prend $\eta = A/\omega$ et $\varepsilon = \omega$. On avait ainsi

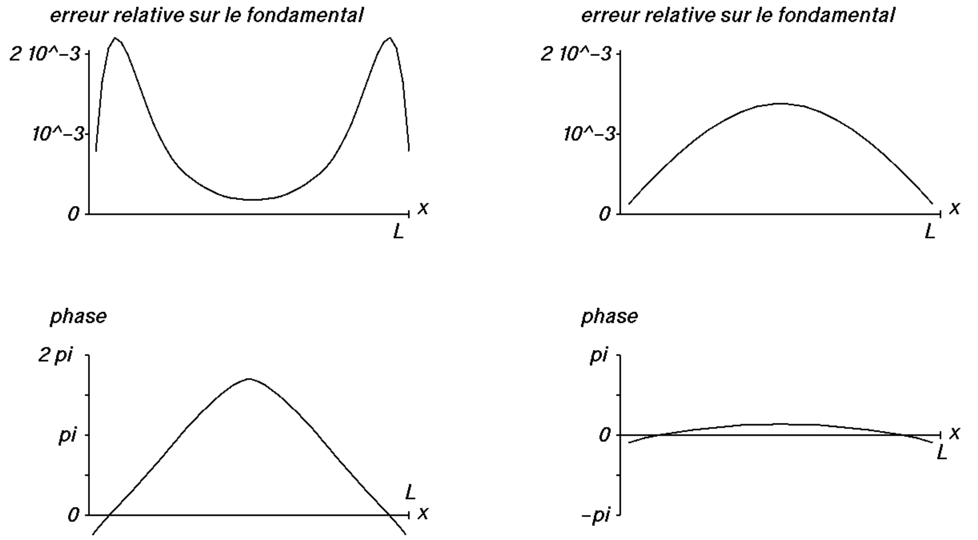


Fig 11. Erreur (relative au maximum selon x de la transformée de Fourier théorique) commise sur le fondamental de la transformée de Fourier de la vitesse u_y et phase de l'erreur, pour $\alpha \simeq 9.3$ (à gauche), puis pour $\alpha \simeq 1.9$ (à droite). Le fait que la phase de l'erreur soit pratiquement nulle dans le deuxième cas indique qu'il ne s'agit pas d'un simple décalage de phase, d'un retard éventuel du modèle sur le forçage.

$a = O(\varepsilon\eta)$, on a ici $A = \varepsilon\eta$! Les équations étant vérifiées à $O(\varepsilon^2\eta)$ près, et les grandeurs nous intéressant étant précédées systématiquement de ∂_α ou ∂_t dans ces relations, on s'attend à avoir des erreurs de l'ordre de grandeur de $\varepsilon\eta$. Autrement dit, pour la vitesse $u \simeq \eta$, cela fait une erreur relative en $O(\varepsilon)$. Or c'est précisément ce qui a été observé : l'erreur relative sur la vitesse ne dépend pas de A mais devient proportionnelle à ω pour ω assez grand devant A, c'est-à-dire η petit (ce qui est exigible puisque tous les calculs théoriques ont été faits en supposant ε et η petits). De plus, l'ordre de grandeur correspond : l'erreur relative sur u_y pour $\omega \simeq 0.001$ est de l'ordre de 0.001. En ce qui concerne l'écoulement de Poiseuille simple, qui est stationnaire, les excellents résultats peuvent s'expliquer par le fait qu'en l'abscence de pulsation, il faille choisir $\varepsilon = 0$. La condition η petit est satisfaite puisque les vitesses sont de l'ordre de grandeur de A dans cet écoulement.

2.3 Résultats numériques des modèles avec pression

Afin de mieux cerner l'intérêt du modèle incompressible, on implémente le forçage comme une variation de pression aux bords du canal, ce qui donne un rôle plus important à ρ, qui, rappelons-le, dans le cas du modèle incompressible, n'exprime pas la densité réelle (qui est ρ_0), mais tiens le rôle de la pression (par la relation $P = c_s^2\rho$). La pression aux bords du canal est $P = c_s^2\rho_0 \pm \frac{1}{2}A(t)(L_y - 1)\rho_0$, ce qui permet d'utiliser de nouveau A comme coordonnée dans les graphes au lieu de P.

2.3.1 Écoulement de Poiseuille

Les résultats se présentent, de façon générale, sous le même aspect que pour l'écoulement de Poiseuille sous les algorithmes avec accélération : quelques milliers de pas où les grandeurs observées convergent exponentiellement, puis un bruit de fond. Mais un facteur supplémentaire intervient : la longueur du canal (que l'on notera L_y, tandis que l'on notera L_x la largeur du canal). Par ailleurs, et surout, des différences flagrantes apparaissent désormais entre les modèles compressible et inxompressible.

La première constation est que l'erreur sur la vitesse ne dépend pas de y ; autrement dit, que l'on soit proche des bords ou au centre du canal n'influe pas sur la précision des mesures que l'on y fait. En revanche, l'erreur dépend maintenant de l'accélération.

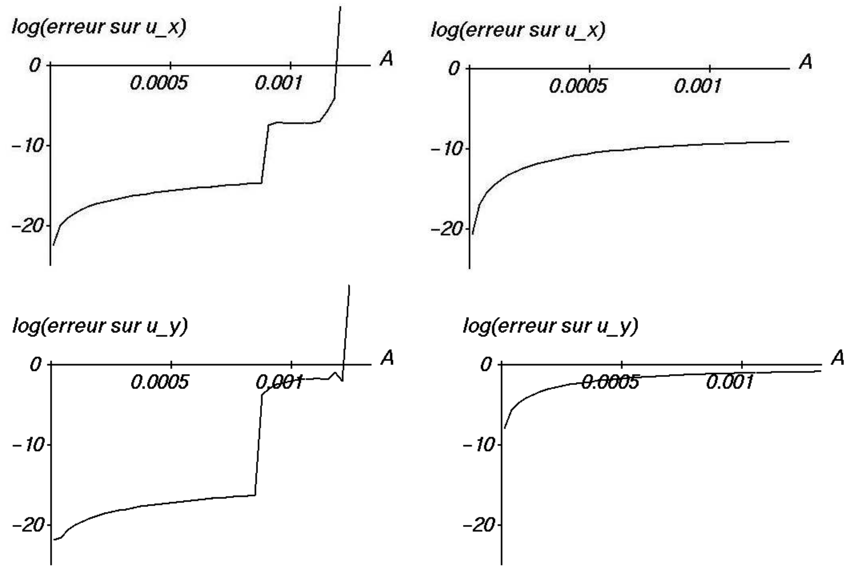


Fig 12. Logarithme décimal de l'erreur normalisée sur les composantes de la vitesse $\frac{1}{L_x}\sum_x u_x(x,L_y/2)^2$ et $\frac{1}{U_{max}^2 L_x}\sum_x u_y(x,L_y/2)^2$ en fonction de l'accélération A imposée pour le modèle incompressible (à gauche) et le modèle compressible (à droite), avec $L_x = 20$. Les résultats semblent indépendants de L_y.

Le modèle incompressible est très précis, mais pour des accélérations trop élevées, il explose ; tandis que l'erreur du modèle compressible, importante, reste assez constante. Quant à la pression $P = c_s^2\rho(x,y)$, elle est proche de sa valeur théorique : l'écart relatif est de l'ordre de 10^{-12} pour le modèle incompressible, et est 100 fois plus élevé pour l'autre modèle.

Étudions la dépendance de l'erreur sur u_y avec la largeur L_x du canal.

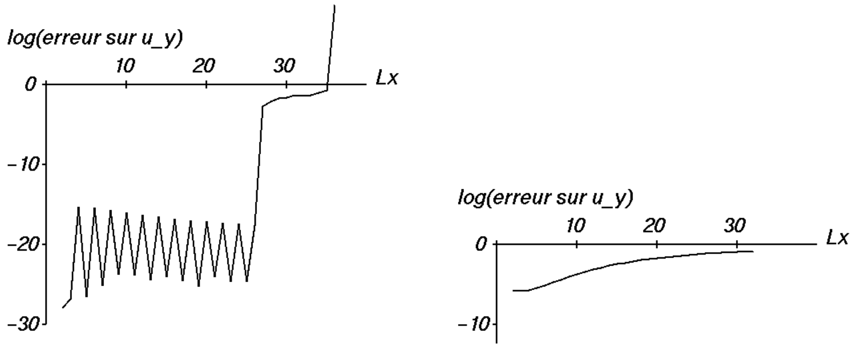


Fig 13. Amplitude de l'erreur (normalisée comme précédemment) sur u_y en fonction de la largeur du canal L_x, pour les modèles incompressible et compressible ($L_y = 5$, $A = 0.0005$). La précision du modèle incompressible varie avec la parité de L_x mais reste dans les deux cas bien supérieure à celle du modèle compressible.

Il peut être utile d'exprimer l'accélération d'explosion en fonction des divers paramètres, c'est-à-dire ici la largeur du canal.

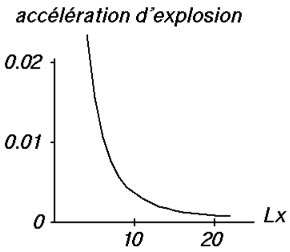


Fig 14. Accélération d'explosion en fonction de L_x pour le modèle incompressible (le modèle compressible n'explosant pas). Elle ne dépend pas de L_y.

Sur cet écoulement stationnaire, le modèle incompressible est donc beaucoup plus précis, mais explose facilement. Plus L_x est petit, plus l'accélération d'explosion est élevée. Il est à noter cependant que les modèles avec pression convergent plus lentement que les modèles avec accélération, mais ceci est dû à la présence aux bords du canal d'une importante différence de pression maintenue constante (l'intérieur du canal a une densité initiale uniforme ρ_0, alors qu'au final la densité est une fonction affine de y).

2.3.2 Écoulement de Poiseuille pulsé

Intéressons-nous tout d'abord à l'erreur commise sur la vitesse.

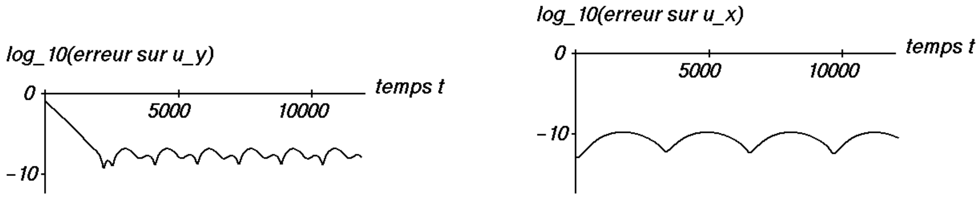


Fig 15. Logarithme décimal de l'erreur sur u_y : $\frac{1}{U_{max}^2 L_x L_y} \sum_{x,y} u_y(x,y)^2$ et sur u_x : $\frac{1}{L_x L_y} \sum_{x,y} u_x(x,y)^2$, pour le modèle incompressible, avec $L_x = 20$, $L_y = 5$, $\omega = 0.002$ et $A = 0.001$. Comme pour les modèles avec accélération, on observe une phase de convergence exponentielle suivie d'une phase où l'erreur est périodique. La pulsation de l'erreur est 2ω pour u_y, ω pour u_x.

Étudions les variations de l'erreur sur la vitesse avec l'amplitude du forçage.

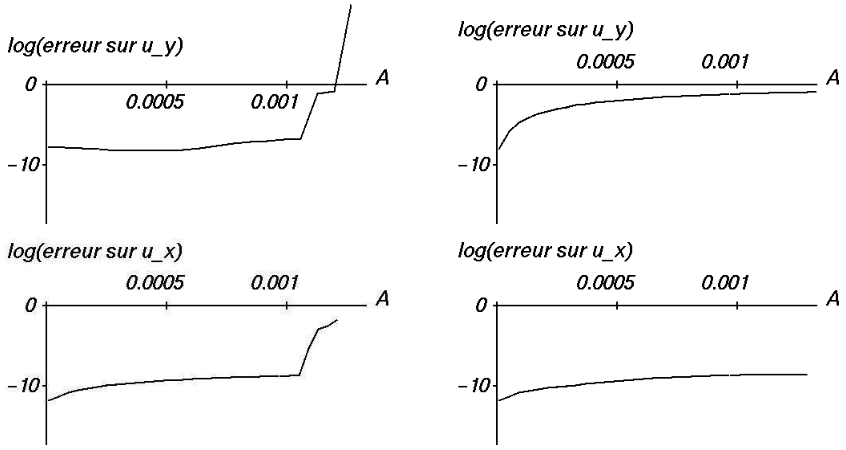


Fig 16. Logarithme décimal de l'erreur sur la vitesse, pour les mêmes conditions que précédemment. Le modèle incompressible (à gauche) est plus précis, quand il n'explose pas. L'erreur semble peu dépendante de l'amplitude du forçage.

Étudions maintenant les variations de l'erreur sur la vitesse avec la pulsation ω.

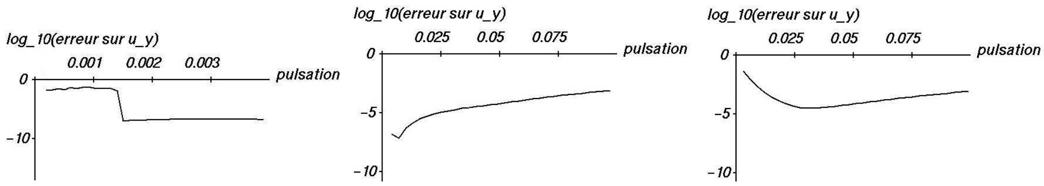


Fig 17. Logarithme décimal de l'erreur sur la vitesse u_y en fonction de la pulsation ω, pour les mêmes conditions que précédemment. Le modèle incompressible (à gauche et au milieu) est plus précis, quand il n'explose pas. La différence entre les deux modèles s'atténue quand ω augmente.

Intéressons-nous à l'impact de la largeur L_x et de longueur L_y du canal sur les résultats.

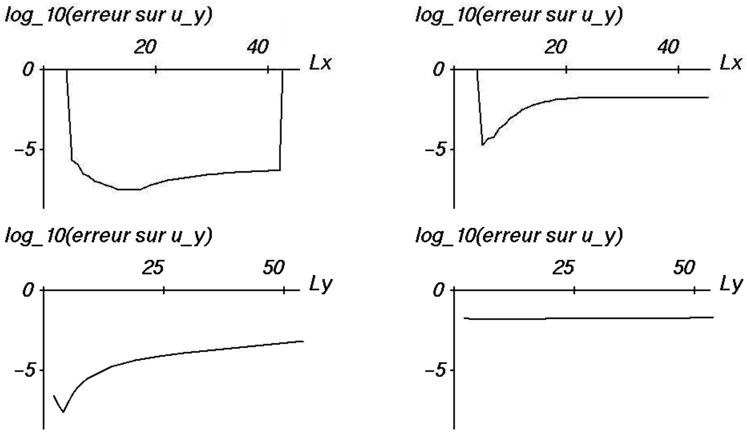


Fig 18. Logarithme décimal de l'erreur sur la vitesse u_y en fonction de L_x, pour $L_y = 5$, puis en fonction de L_y, pour $L_x = 20$, avec $\omega = 0.005$ et $A = 0.001$. Le modèle incompressible (à gauche) est plus précis, quand il n'explose pas. L'erreur semble ne pas dépendre de L_x (pour le modèle incompressible) ; par contre, elle augmente avec L_y, probablement à cause du temps nécessaire à la propagation des différences de pression d'une entrée à l'autre du canal. Pour un forçage donné, il existe donc une plage de valeurs dans laquelle on est contraint de choisir L_x.

Au vu de la figure 15, décomposons l'erreur sur les deux composantes de la vitesse en série de Fourier (pour le modèle incompressible, l'erreur sur le modèle compressible étant trop élevée pour obtenir des résultats remarquables).

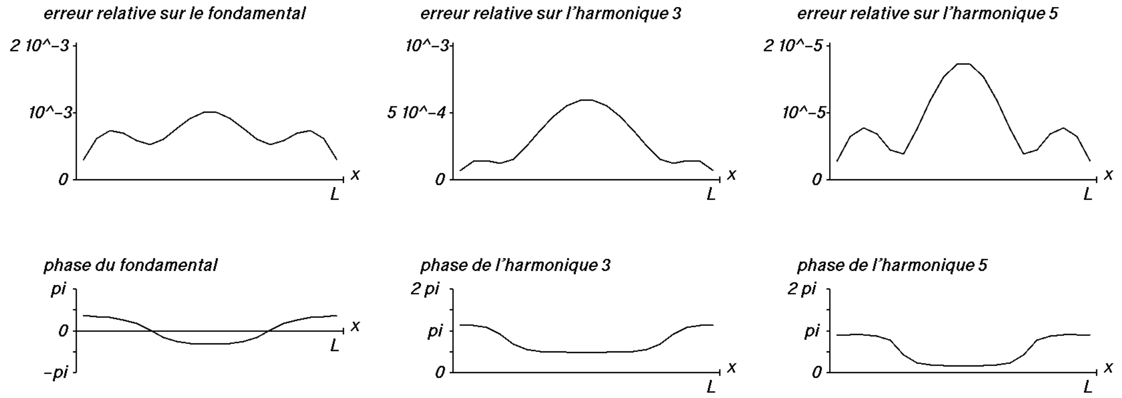


Fig 19. Module et phase de l'erreur sur la vitesse u_y pour le modèle incompressible, avec les mêmes conditions que précédemment. L'erreur se situe sur le fondamental et les harmoniques impaires (3ω, 5ω). L'amplitude des harmoniques paires est de l'ordre de 5.10^{-7}.

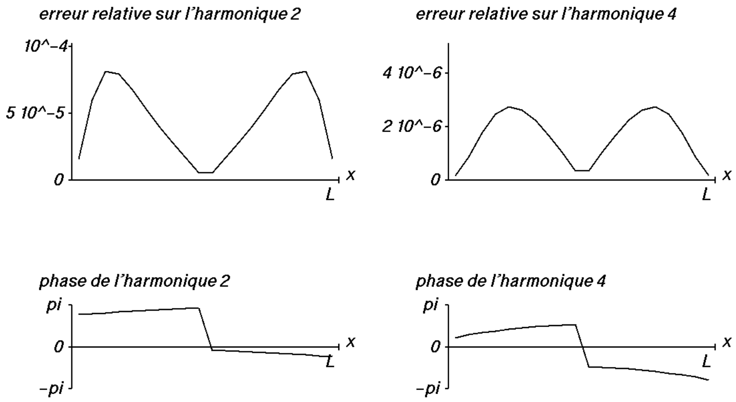


Fig 20. Module et phase de l'erreur sur la vitesse u_x pour le modèle incompressible, avec les mêmes conditions que précédemment. L'erreur se situe sur les harmoniques d'ordre pair (2ω, 4ω). L'amplitude des harmoniques impaires est de l'ordre de 10^{-9}. Le changement brusque de phase en $x = L_x/2$ met en évidence la symétrie du système.

Le modèle incompressible avec pression introduit donc une erreur supplémentaire au troisième ordre en u_y. On simule donc un fluide incompressible régi par l'équation Navier-Stokes, mais avec des termes supplémentaires : des puissances impaires de u. Quant aux termes pairs apparaissant pour u_x, comme u_x est théoriquement nul, on ne peut rien en conclure, à part l'existence potentielle d'un terme en $\partial_\alpha u_\beta^2$, qui produirait un effet proche de celui observé sur la figure 20.

Afin de savoir pour quelles valeurs des paramètres A, ω et L_x le modèle incompressible donne des résultats cohérents, les variations de l'accélération d'explosion avec ω et L_x sont étudiées (Fig.21).

Dans le cadre des modèles à pression, le modèle incompressible est donc beaucoup plus précis. Les erreurs du modèle incompressible sont du même ordre de grandeur que celles des modèles à accélération. Il semblerait que le paramètre η rende compte assez correctement du phénomène d'explosion. En effet, on a ici $\eta = A/\omega$, et l'accélération d'explosion est proportionnelle à ω (quand elle n'est pas inconditionnelle). Il s'agirait alors de garder η inférieure à une certaine valeur. Mais η ne

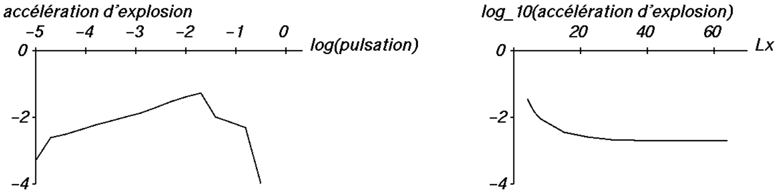


Fig 21. Logarithme décimal de l'accélération d'explosion en fonction du logarithme népérien de la pulsation ω, pour $L_x = 20$; puis en fonction de la largeur du canal L_x, pour $\omega = 0.01$. Dans le premier graphe, la pente vaut $1/\ln(10)$ à 10^{-2} près. Pour ω dans l'intervalle 0.01-0.2, l'accélération d'explosion est donc linéaire en ω (en $\omega_0 = 0.01$, elle vaut $A_0 \simeq 0.0027$). Cet intervalle est bordé par deux zones d'erreur élevée : pour $\omega < 0.01$, il s'agit du plateau que l'on a déjà vu sur le premier graphe de la figure 17 (pour dautres valeurs des paramètres) ; pour $\omega > 0.2$, la période devient inférieure à 30 pas de temps, c'est l'effet de la discrétisation du temps qui intervient. Le second graphe montre que pour des valeurs raisonnables de L_x ($L_x > 10$), l'accélération d'explosion est à peu près constante, ce qui signifie qu'à ω fixé, il existe une valeur critique de A en dessous de laquelle le modèle n'explose jamais, quelque soit la valeur de $L_x > 10$.

prend pas en compte la largeur du canal L_x, qui influe également sur la valeur de l'accélération d'explosion (second graphe de la figure 21).

Conclusion

Le modèle incompressible avec pression présente un net avantage dans les conditions de non-explosion. Cependant, afin de le valider complètement, il serait opportun de tester un autre écoulement dont on connaît l'expression théorique, mais pour lequel le terme $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ ne soit pas uniformément et constamment nul (ce qui est le cas ici). En effet, le test de l'écoulement de Poiseuille pulsé ne permet pas de savoir si des termes en $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ apparaissent dans l'erreur ; cependant on a vu que les parasites de pulsation 2ω sur la vitesse u_x (Fig. 20) indiquent la présence probable d'un terme en $\partial_\alpha \vec{u}^2$ dans l'erreur. D'autre part, vu que ce modèle donne souvent des résultats très précis juste avant d'exploser, et, plus généralement, vu que les zones de haute précision jouxtent les zones d'explosion, il pourrait être utile de déterminer précisément les causes des explosions et en pratique d'ajouter un garde-fou dans l'implémentation du modèle qui le fasse basculer en mode compressible (qui donne quand même des résultats du bon ordre de grandeur (voire plus) sur des fluides incompressibles) dès que les paramètres de forçage (amplitude et fréquence caractéristiques) s'approchent d'une zone d'explosion.

Bibliographie

. *Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier-Stokes Equation*, Xiaoyi He & Li-Shi Luo, *Journal of Statistical Physics*, Vol. 88, Nos. 3/4, 1997

. *The lattice Boltzmann equation : theory and applications*, R.Benzi, S. Succi & M. Vergassola, *Physics Reports*, 222, No. 3, 1992

. *Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method*, Hudong Chen, Shiyi Chen & William H. Matthaeus, *Physical Review*, Vol. 45, No. 8, 1992

. *Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation*, Y. H. Qian, D. D'Humières & P. Lallemand, *Europhysics Letters*, 1992

Table des matières

Introduction **1**

1 Présentation et justification des modèles **1**

1.1 Modélisation utilisée 1

1.1.1 Rappels de mécanique des fluides 1

1.1.2 Discrétisation 1

1.2 Modèle compressible avec accélération 3

1.2.1 Recherche de N_i^{eq} 3

1.2.2 Validité de la modélisation 4

1.3 Autres modèles 6

2 Résultats **6**

2.1 Résultats théoriques 6

2.1.1 Écoulement de Poiseuille 6

2.1.2 Écoulement de Poiseuille pulsé 7

2.2 Résultats numériques des modèles avec accélération 8

2.2.1 Écoulement de Poiseuille 8

2.2.2 Écoulement de Poiseuille pulsé 10

2.3 Résultats numériques des modèles avec pression 12

2.3.1 Écoulement de Poiseuille 13

2.3.2 Écoulement de Poiseuille pulsé 14

Conclusion **17**

Bibliographie **18**