

Le test de Williams

1.- Le test de Williams proprement dit

On considère un plan d'expérience mené selon un plan $S\langle A_{k+1} \rangle$, dans lequel les $k + 1$ niveaux du facteur A sont **ordonnés**. Les niveaux sont numérotés de 0 à k ; le niveau 0 est le niveau "contrôle", les k autres niveaux sont les "doses" croissantes.

On souhaite déterminer si la VD est, en moyenne, significativement inférieure dans la condition "contrôle" à sa valeur dans l'une des autres conditions.

Autrement dit, les hypothèses du test peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_0 &= \mu_1 = \dots = \mu_k \\ H_1 : \mu_0 &\leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_k \text{ et } \mu_0 < \mu_k \end{aligned}$$

Dans la version initiale du test de Williams, on suppose :

- que la VD est distribuée normalement pour chacun des niveaux du facteur, et que la variance de la VD est la même dans les $k + 1$ conditions ;
- que **les groupes sont équilibrés** : $n_0 = n_1 = \dots = n_k = n$.

Mise en oeuvre du test

Soit $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k$ les moyennes observées sur les échantillons. On détermine les estimations du maximum de vraisemblance des moyennes, ou estimations isotones par :

$$- \hat{\mu}_0 = \bar{X}_0$$

$$- \text{Pour } 1 \leq i \leq k \quad \hat{\mu}_i = \max_{1 \leq u \leq i} \min_{1 \leq v \leq k} \frac{\sum_{j=u}^v \bar{X}_j}{v - u + 1}$$

Un algorithme pratique élémentaire permet de déterminer ces estimations. Cf. exemple infra.

Par ailleurs, soit s^2 le carré moyen des résidus, ou *variance conjointe*, tel qu'il est calculé dans une ANOVA, c'est-à-dire : $s^2 = \frac{1}{(k+1)(n-1)} \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2$.

La statistique de test est :

$$\bar{t}_k = \frac{\hat{\mu}_k - \bar{X}_0}{E} \quad \text{avec} \quad E^2 = \frac{2}{n} s^2$$

Sous H_0 , $\bar{t}_k$ suit une loi spécifique dont les paramètres sont le nombre k de niveaux différents du niveau contrôle et le nombre de degrés de liberté ν du carré moyen des résidus, c'est-à-dire $(k+1)(n-1)$.

Pour $k=1$, cette loi est identique à la loi de Student. Williams a tabulé cette loi pour $k \leq 10$ aux seuils de 5% et de 1%.

Soit $\bar{t}_{k,\alpha}$ la valeur tabulée au seuil α . Si $\bar{t}_k > \bar{t}_{k,\alpha}$, la dose k a un effet. On peut ensuite poursuivre l'étude en calculant $\bar{t}_{k-1} = \frac{\hat{\mu}_{k-1} - \bar{X}_0}{E}$. On ne recalcule ni les estimations isotones ni l'erreur type E , et on compare cette valeur à $\bar{t}_{k-1,\alpha}$, en conservant le même nombre de degrés de liberté.

Exemple (donné par Williams) :

Une expérience a été menée avec 1 groupe contrôle et 6 groupes expérimentaux, avec des doses croissantes. On dispose de 8 mesures dans chaque groupe.

- La variance conjointe vaut : $s^2 = 1,16$
- Les moyennes observées dans chacun des groupes sont :

i	0	1	2	3	4	5	6
$\bar{X}_i$	10,4	10,0	9,9	10,6	11,4	11,9	11,7

Détermination des estimations isotones : si deux moyennes (de groupes expérimentaux) ne sont pas rangées par ordre croissant, on les remplace par leur moyenne pondérée.

A l'étape 1, on obtient :

	10,4	9,95	10,6	11,4	11,9	11,7
Poids	1	2	1	1	1	1

A l'étape 2 :

	10,4	9,95	10,6	11,4	11,8
Poids	1	2	1	1	2

Les estimations isotones sont donc :

i	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{\mu}_i$	10,4	9,95	9,95	10,6	11,4	11,8	11,8

L'erreur type vaut : $E = \sqrt{\frac{2}{8} \times 1,16} = 0,5385$ et la statistique de test est : $\bar{t}_6 = \frac{11,8 - 10,4}{0,5385} = 2,60$.

On lit dans la table de Williams, pour 49 ddl : $\bar{t}_{6,5\%} = 1,81$. La dose 6 diffère donc significativement de la situation de référence.

De même, comme $\bar{t}_{5,5\%} = 1,80$, la dose 5 est également significativement différente du groupe contrôle. Il en est de même de la dose 4. En revanche, pour la dose 3 : $\bar{t}_3 = \frac{10,6 - 10,4}{0,5385} = 0,37$ alors que $\bar{t}_{3,5\%} = 1,79$.

Cette dose, ainsi que les doses d'ordre inférieur, ne sont pas significativement différentes de la condition contrôle.

2.- Tables pour le test de Williams

Williams a tabulé les valeurs critiques de la loi de $\bar{t}$ pour les seuils de 5% et 1%, $k = 1, 2, \dots, 10$ et les nombres de degrés de liberté courants. Un extrait de la table correspondant au seuil de 5% est donné ci-dessous :

D.F.	k = number of dose levels							
v	1	2	3	4	5	6	7	8
5	2.02	2.14	2.19	2.21	2.22	2.23	2.24	2.24
6	1.94	2.06	2.10	2.12	2.13	2.14	2.14	2.15
7	1.89	2.00	2.04	2.06	2.07	2.08	2.08	2.09
8	1.86	1.96	2.00	2.01	2.02	2.03	2.04	2.04
9	1.83	1.93	1.96	1.98	1.99	2.00	2.00	2.01

On peut également obtenir le niveau de significativité d'une valeur donnée de la statistique de test à l'aide d'une méthode de bootstrap telle que celle utilisée dans le programme R suivant (adapté à partir d'un listing en SAS/IML rédigé par Bretz :

Calcul des estimations isotones

```
mle <- function(x, n) {
  k <- length(x)
  a <- rep(+Inf, k)
  c <- rep(-Inf, k)
  m <- rep(-Inf, k)

  for (i in 1:k) {
    for (u in 1:i) {
      for (v in i:k) {
        a[v] <- sum(x[u:v]*n[u:v])/sum(n[u:v])
      }
      c[u] <- min(a)
      a <- rep(+Inf, k)
    }
    m[i] <- max(c)
    c <- rep(-Inf, k)
  }
  return(m)
}
```

Nombre de simulations. Cette valeur peut être modifiée à volonté.
simanz <- 9999

t_obs : valeur observée de la statistique de Williams
n : vecteur des tailles des échantillons, y compris le groupe contrôle
Il ne s'agit pas forcément de groupes équilibrés

```
simul <- function(n, t_obs) {
  k <- length(n) # Ici, k designe le nombre de groupes, y compris le controle
  nu <- sum(n) - k # Nombre de ddl
  maxn <- max(n)
  mu <- rep(0, k)
  count <- 0

  for (index1 in 1:simanz) {
    # On simule un échantillon
    data <- matrix(rnorm(k*maxn,0,1),nrow=k)+matrix(rep(mu,maxn), byrow=TRUE,nrow=k)
    x <- rep(0, k)
    for (i in 1:k){
      # Calcul des moyennes dans chaque groupe
      x[i] <- sum(data[i,1:n[i]])/n[i] }
    # Calcul des estimations isotones
    m <- mle(x,n)

    # Calcul de la variance conjointe et de l'erreur type
    s <- 0
    for (i in 1:k)
      {s <- s + sum((data[i,1:n[i]]-x[i])^2) }
    s <- s/nu

    # Calcul de la valeur correspondante de la statistique
    t <- (m[k] - x[1])/sqrt(s/n[1]+s/n[k])
    # Cumul pour calcul du niveau de significativité
    if (t_obs > t) {count <- count + 1}

  }
  # Pourquoi simanz +1 ici et pas seulement simanz ?
  p <- 1 - count/(simanz + 1)
  return(p)
}
```

Sur l'exemple précédent, on obtient :

```
> simul(c(8,8,8,8,8,8,8),2.60)
[1] 0.0071
```

Un programme voisin permet d'obtenir les valeurs critiques pour un seuil choisi :

```
# Calcul approché des valeurs critiques de la statistique de Williams
# n est le vecteur des tailles des échantillons contrôle et doses
# seuil est le seuil choisi (test unilatéral)

will_tcrit <- function(n, seuil) {
  k <- length(n)
  nu <- sum(n) - k
  maxn <- max(n)
  mu <- rep(0, k)
  count <- 0
  tgen <- c()

  for (index1 in 1:simanz) {
    data <- matrix(rnorm(k*maxn,0,1),nrow=k)+matrix(rep(mu,maxn), byrow=TRUE,nrow=k)

    x <- rep(0, k)
    for (i in 1:k){
      x[i] <- sum(data[i,1:n[i]])/n[i] }
    m <- mle(x,n)

    s <- 0
    for (i in 1:k)
      {s <- s + sum((data[i,1:n[i]]-x[i])^2) }
    s <- s/nu

    t <- (m[k] - x[1])/sqrt(s/n[1]+s/n[k])

    tgen <- c(tgen,t)
  }
  # tgen est un vecteur contenant des valeurs simulées de la statistique, sous H0
  # le nombre de simulations est réglé par la variable simanz

  # On trie les valeurs simulées par ordre croissant
  tgensort <- sort(tgen)

  # On choisit l'indice en cohérence avec le seuil choisi.
  indice_crit <- as.integer(1+ simanz * (1- seuil))
  t_crit <- tgensort[indice_crit]

  return(t_crit)
}
```

Exemple :

```
> will_tcrit(c(8,8,8,8,8,8,8),0.05)
[1] 1.821859
```

3.- Généralisation à des groupes non équilibrés

On se place tout d'abord dans le cas où les groupes "doses" sont équilibrés, mais le groupe contrôle n'est pas équilibré avec les groupes "doses".

Autrement dit : $n_1 = \dots = n_k = n$ mais on n'a pas nécessairement $n_0 = n$.

Les hypothèses du test sont identiques à celles du cas précédent et le calcul des estimations isotones est effectué comme précédemment.

L'erreur type est alors calculée par : $E^2 = s^2 \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n} \right)$.

En revnache, il est alors nécessaire d'utiliser des tables ajustées. Williams propose d'ajuster les valeurs critiques de la manière suivante :

- On pose : $w = \frac{n_0}{n}$
- On applique la formule de correction : $\bar{t}_{i,\alpha}(w) = \bar{t}_{i,\alpha}(1) - 10^{-2} \beta \left(1 - \frac{1}{w} \right)$, où β est un coefficient dépendant de k .

Exemple :

Pour 59 ddl, 5 groupes "doses" et un seuil de 2,5%, Williams indique $\bar{t}_{5,2.5\%}(1) = 2,092$ et $\beta = 6$. Avec le même nombre de ddl, si le groupe contrôle est d'effectif 18, et le groupe de dose maximale est de taille 8, on obtient : $\bar{t}_{5,2.5\%}\left(\frac{18}{8}\right) = \bar{t}_{5,2.5\%}(1) - 10^{-2} \times 6 \left(1 - \frac{8}{18} \right) = 2,06$.

Ces valeurs sont très proches de celles obtenues à l'aide des programmes précédents :

```
> will_tcrit(c(18,10,10,9,10,8),0.025)
[1] 2.056291
> will_tcrit(c(11,11,11,11,11,10),0.025)
[1] 2.090120
```

Lorsque les groupes "doses" sont presque équilibrés, c'est-à-dire lorsque, pour tous $i, j > 0$ on a :

$0,8 \leq \frac{n_i}{n_j} \leq 1,25$, Williams montre que l'on peut continuer à procéder de la même façon. En revanche, pour

le calcul des estimations isotones, il faut pondérer les moyennes en fonction de la taille des groupes. La définition des estimations devient alors :

$$- \hat{\mu}_0 = \bar{X}_0$$

$$- \text{Pour } 1 \leq i \leq k \quad \hat{\mu}_i = \max_{1 \leq u \leq i} \min_{1 \leq v \leq k} \frac{\sum_{j=u}^v n_j \bar{X}_j}{\sum_{j=u}^v n_j}$$

et chacune des erreurs types est calculée par une formule du type : $E^2 = s^2 \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_i} \right)$.

4.- Le test non paramétrique d'Eryl Shirley

Dans le cas où les données ne vérifient pas les conditions d'application du test de Williams, Eryl Shirley propose de travailler sur le protocole des rangs.

- On construit le protocole des rangs pour l'ensemble des observations.
- On désigne par $\bar{R}_0, \bar{R}_1, \dots, \bar{R}_k$ les rangs moyens dans les $k + 1$ groupes.
- On désigne par N le nombre total d'observations.
- Pour des groupes équilibrés, la statistique de test est calculée de la manière suivante :

$$\hat{R}_k = \max_{1 \leq u \leq k} \sum_{j=u}^k \frac{\bar{R}_j}{k - u + 1} \quad ; \quad E = \left(\frac{(k+1)(N+1)}{6} \right)^{1/2}$$

$$\bar{t}_k = \frac{\hat{R}_k - \bar{R}_0}{E}$$

Sous H_0 , cette statistique suit la loi du test de Williams, avec $ddl = \infty$.

- Si les groupes ne sont pas équilibrés, la statistique de test s'écrit :

$$\hat{R}_k = \max_{1 \leq u \leq k} \frac{\sum_{j=u}^k n_j \bar{R}_j}{\sum_{j=u}^k n_j} \quad ; \quad E = \left(\frac{N(N+1)}{12} \left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_0} \right) \right)^{1/2}$$

$$\bar{t}_k = \frac{\hat{R}_k - \bar{R}_0}{E}$$

Comme pour d'autres tests non paramétriques sur les rangs, on applique une correction pour les ex aequo en multipliant l'expression précédente par le rapport : $\left(\frac{\text{Variance de } (1,2,\dots,N)}{\text{Variance des rangs réels}} \right)^{1/2}$.

Si le test de la condition k fait apparaître une différence significative par rapport au contrôle, Eryl Shirley reprend le calcul avec la condition $k - 1$ sans recalculer le protocole des rangs. La statistique devient donc :

$$\hat{R}_{k-1} = \max_{1 \leq u \leq k-1} \frac{\sum_{j=u}^{k-1} n_j \bar{R}_j}{\sum_{j=u}^{k-1} n_j} \quad ; \quad E = \left(\frac{N(N+1)}{12} \left(\frac{1}{n_{k-1}} + \frac{1}{n_0} \right) \right)^{1/2}$$

$$\bar{t}_{k-1} = \frac{\hat{R}_{k-1} - \bar{R}_0}{E}$$

D.A. Williams a critiqué cette méthode et recommande de reprendre l'ensemble de la démarche en ne considérant que les données relatives aux groupes 0, 1, ..., $k - 1$. Cf. exemple infra.

Exemple (fourni par Eryl Shirley)

Temps de réaction de souris à des stimuli, dans une condition contrôle et 3 conditions "doses" :

Groupe 0	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
2,40	2,80	9,80	7,00
3,00	2,20	3,20	9,80
3,00	3,80	5,80	9,40
2,20	9,40	7,80	8,80
2,20	8,40	2,60	8,80
2,20	3,00	2,20	3,40
2,20	3,20	6,20	9,00
2,80	4,40	9,40	8,40
2,00	3,20	7,80	2,40
3,00	7,40	3,40	7,80

Le protocole des rangs et les rangs moyens sont donnés par :

Rangs 0	Rangs 1	Rangs 2	Rangs 3
---------	---------	---------	---------

8,50	11,50	39,50	26,00
14,50	4,50	18,00	39,50
14,50	22,00	24,00	37,00
4,50	37,00	29,00	33,50
4,50	31,50	10,00	33,50
4,50	14,50	4,50	20,50
4,50	18,00	25,00	35,00
11,50	23,00	37,00	31,50
1,00	18,00	29,00	8,50
14,50	27,00	20,50	29,00

Rangs moyens	8,25	20,70	23,65	29,40
--------------	------	-------	-------	-------

La correction pour les ex aequo vaut ici :

$$\left(\frac{\text{Variance de } (1,2,\dots,40)}{\text{Variance des rangs réels}} \right)^{1/2} = \left(\frac{136,67}{135,86} \right)^{1/2} = 1,002968$$

La statistique pour le premier test est :

$$\bar{t}_3 = \frac{29,40 - 8,25}{\left(\frac{40 \times 41}{12} \times \frac{2}{10} \right)^{1/2}} \times 1,002968 = 4,057$$

La valeur critique donnée par Williams est $\bar{t}_{3,1\%} = 2,377$, et la dose 3 diffère donc significativement de la dose 0.

Si on poursuit l'étude selon la méthode préconisée par E. Shirley, on obtient : $\bar{t}_2 = 2,95$. Comme : $\bar{t}_{2,1\%} = 2,366$. on en conclut que l'effet de la dose 2 est significativement différent du contrôle.

On obtient ensuite : $\bar{t}_1 = 2,39$. Comme : $\bar{t}_{1,1\%} = 2,326$. on en conclut aussi que l'effet de la dose 1 est significativement différent du contrôle.

Williams a critiqué cette méthode. Selon lui, si la première étape conclut sur H_1 , il est préférable de reprendre l'étude en calculant un protocole des rangs sur les groupes 0, 1, $k - 1$ et de poursuivre ainsi jusqu'à ce que les différences ne soient plus significatives. Sur l'exemple précédent, il obtient ainsi :

Etape 2 :

Rangs 0	Rangs 1	Rangs 2
8,00	10,50	30,00
13,50	4,50	17,00
13,50	20,00	22,00
4,50	28,50	25,50
4,50	27,00	9,00
4,50	13,50	4,50
4,50	17,00	23,00
10,50	21,00	28,50
1,00	17,00	25,50
13,50	24,00	19,00

Rangs moyens	7,80	18,30	20,40
--------------	------	-------	-------

La correction pour les ex aequo vaut ici :

$$\left(\frac{\text{Variance de (1,2,...,30)}}{\text{Variance des rangs réels}} \right)^{1/2} = \left(\frac{77,5}{76,60} \right)^{1/2} = 1,006$$

La statistique pour le premier test est :

$$\bar{t}_2 = \frac{20,40 - 7,80}{\left(\frac{30 \times 31}{12} \times \frac{2}{10} \right)^{1/2}} \times 1,006 = 3,22$$

Comme précédemment, la dose 2 diffère donc significativement de la dose 0.

Etape 3

Rangs 0	Rangs 1
7,00	8,50
11,50	4,00
11,50	16,00
4,00	20,00
4,00	19,00
4,00	11,50
4,00	14,50
8,50	17,00
1,00	14,50
11,50	18,00

Rangs moyens	6,70	14,30
--------------	------	-------

La correction pour les ex aequo vaut ici :

$$\left(\frac{\text{Variance de (1,2,...,20)}}{\text{Variance des rangs réels}} \right)^{1/2} = \left(\frac{35}{34,16} \right)^{1/2} = 1,012$$

La statistique pour le premier test est :

$$\bar{t}_1 = \frac{14,30 - 6,70}{\left(\frac{20 \times 21}{12} \times \frac{2}{10} \right)^{1/2}} \times 1,012 = 2,91$$

Comme précédemment, la dose 1 diffère donc significativement de la dose 0.

Autre exemple fourni par Williams pour mettre en évidence les différences entre la méthode qu'il préconise et celle indiquée par E. Shirley :

Données (ce sont déjà des rangs) :

Groupe 0	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
1,00	5,00	3,00	13,00
2,00	7,00	9,00	18,00
4,00	15,00	12,00	23,00
6,00	17,00	20,00	27,00
8,00	25,00	22,00	30,00
10,00	28,00	24,00	32,00
11,00	29,00	31,00	35,00
14,00	34,00	33,00	36,00
16,00			
19,00			

21,00			
26,00			

Etape 1 : on compare la dose 0 (contrôle) et la dose 3 :

	Groupe 0	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
Rangs moyens	11,50	20,00	19,25	26,75
Estimations	11,50	19,63	19,63	26,75

$$\bar{t}_3 = \frac{26,75 - 11,50}{\left(\frac{36 \times 37}{12} \times \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right) \right)^{1/2}} = 3,17$$

Avec la correction pour groupes non équilibrés, on obtient comme valeur critique $\bar{t}_{3,0,5\%} = 2,60$, et la dose 3 diffère donc significativement de la dose 0.

Etape 2 (méthode indiquée par E. Sheryl) : on compare la dose 0 et la dose 2 :

$$\bar{t}_2 = \frac{19,625 - 11,50}{\left(\frac{36 \times 37}{12} \times \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right) \right)^{1/2}} = 1,69$$

On obtient comme valeur critique $\bar{t}_{2,5\%} = 1,71$, et la dose 2 ne diffère pas significativement de la dose 0.

Etape 2 (méthode indiquée par D.A. Williams) :

	Rangs 0	Rangs 1	Rangs 2
	1,00	5,00	3,00
	2,00	7,00	9,00
	4,00	14,00	12,00
	6,00	16,00	18,00
	8,00	22,00	20,00
	10,00	24,00	21,00
	11,00	25,00	26,00
	13,00	28,00	27,00
	15,00		
	17,00		
	19,00		
	23,00		
Rangs moyens	10,75	17,63	17,00
Estimations	10,75	17,31	17,31

$$\bar{t}_2 = \frac{17,31 - 10,75}{\left(\frac{28 \times 29}{12} \times \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right) \right)^{1/2}} = 1,75$$

Cette valeur est significative au seuil de 5% et on peut poursuivre la méthode en comparant le groupe contrôle et le groupe 1.

Rangs 0	Rangs 1
1,00	4,00
2,00	6,00
3,00	11,00
5,00	13,00
7,00	16,00

8,00	18,00
9,00	19,00
10,00	20,00
12,00	
14,00	
15,00	
17,00	

Rangs moyens	8,58	13,38
--------------	------	-------

$$\bar{t}_1 = \frac{13,38 - 8,58}{\left(\frac{20 \times 21}{12} \times \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right) \right)^{1/2}} = 1,77$$

On obtient comme valeur critique $\bar{t}_{1,5\%} = 1,645$, et la dose 1 diffère significativement de la dose 0 au seuil de 5%.

5.- Le test non paramétrique de Dennis House pour des groupes appariés

Dennis House a proposé un test analogue s'appliquant à des groupes appariés :

- Soit n le nombre d'individus statistiques étudiés.
- Comme précédemment, on a une condition contrôle et k conditions "doses".
- Comme dans l'ANOVA de Friedman, on calcule un protocole de rangs par individu statistique.
- La statistique de test s'écrit :

$$\hat{R}_k = \max_{1 \leq u \leq k} \sum_{j=u}^k \frac{\bar{R}_j}{k - u + 1} ; E = \left(\frac{2(k+1)(k+2)}{n \cdot 12} \right)^{1/2}$$

$$\bar{t}_k = \frac{\hat{R}_k - \bar{R}_0}{E}$$

Sous H_0 , cette statistique suit la loi du test de Williams, avec $ddl = \infty$.

Si le test de la condition k v/s la condition contrôle conclut sur H_1 , on peut poursuivre en comparant la condition $k - 1$ à la condition contrôle. On recommence alors toute la procédure en ne considérant que les conditions 0 (contrôle), 1, ..., ($k - 1$).

Comme dans le cas du test de Friedman, la correction pour les ex aequo consiste à multiplier l'expression

précédente par le coefficient :
$$\left(\frac{n \times \text{Variance de } (0,1,\dots,k)}{\sum_{i=1}^n \text{Variance des rangs réels de la ligne } i} \right)^{1/2}.$$

Exemple (fourni par Dennis House) :

On mesure à l'aide d'une variable dépendante (sRaw) le comportement de 11 sujets soumis à 3 concentrations de SO₂. Les sujets sont également évalués sans être exposés au SO₂. Les données sont les suivantes :

	Concentration en SO ₂			
Sujet	0,00	0,25	0,50	1,00
1	0,2	2,3	-0,8	4,0
2	6,2	12,7	13,1	9,0

3	0,3	-0,2	1,1	4,2
4	0,3	2,1	12,8	6,7
5	4,9	6,0	18,2	35,0
6	1,8	1,8	3,4	9,0
7	3,9	3,9	13,5	12,9
8	2,0	1,1	4,4	2,0
9	0,3	3,8	6,1	7,1
10	2,5	2,5	2,8	1,5
11	5,4	1,3	10,6	10,6

Le protocole des rangs par sujet est donné par :

Rangs				
1	2	3	1	4
2	1	3	4	2
3	2	1	3	4
4	1	2	4	3
5	1	2	3	4
6	1,5	1,5	3	4
7	1,5	1,5	4	3
8	2,5	1	4	2,5
9	1	2	3	4
10	2,5	2,5	4	1
11	2	1	3,5	3,5

Rangs moyens	1,64	1,86	3,32	3,18
Estimations	1,64	1,86	3,25	3,25

Le coefficient de la correction pour les ex aequo est ici : $\lambda = \left(\frac{11 \times 1,6667}{6 \times 1,6667 + 5 \times 1,50} \right)^{1/2} = 1,0235$

La statistique de test vaut donc : $\bar{t}_3 = \frac{3,25 - 1,64}{\left(\frac{4 \times 5}{12} \times \frac{2}{11} \right)^{1/2}} \times 1,0235 = 3,0002$.

La valeur critique donnée par Williams est $\bar{t}_{3,1\%} = 2,377$, et la concentration 1 ppm diffère donc significativement du contrôle au seuil de 1%.

Pour tester la concentration 0,50 ppm, on recalcule un protocole de rangs :

Rangs			
1	2	3	1
2	1	2	3
3	2	1	3
4	1	2	3
5	1	2	3
6	1,5	1,5	3
7	1,5	1,5	3
8	2	1	3
9	1	2	3
10	1,5	1,5	3
11	2	1	3

Rangs moyens	1,50	1,68	2,82
Estimations	1,50	1,68	2,82

Le coefficient de la correction pour les ex aequo est alors : $\lambda = \left(\frac{11 \times 1,00}{8 \times 1,00 + 3 \times 0,75} \right)^{1/2} = 1,0359$

La statistique de test vaut donc : $\bar{t}_2 = \frac{2,82 - 1,64}{\left(\frac{3 \times 4}{12} \times \frac{2}{11} \right)^{1/2}} \times 1,0359 = 3,2025$.

La valeur critique donnée par Williams est $\bar{t}_{2,1\%} = 2,366$, et la concentration 0,5 ppm diffère donc significativement du contrôle au seuil de 1%.

Enfin, pour tester la condition 0,25 ppm, on considère le protocole de rangs suivant :

Rangs		
1	1	2
2	1	2
3	2	1
4	1	2
5	1	2
6	1,5	1,5
7	1,5	1,5
8	2	1
9	1	2
10	1,5	1,5
11	2	1

Rangs moyens	1,41	1,59
Estimations	1,41	1,59

Le coefficient de la correction pour les ex aequo est alors : $\lambda = \left(\frac{11 \times 0,50}{8 \times 0,50 + 3 \times 0,00} \right)^{1/2} = 1,1726$

La statistique de test vaut donc : $\bar{t}_1 = \frac{1,59 - 1,41}{\left(\frac{2 \times 3}{12} \times \frac{2}{11} \right)^{1/2}} \times 1,1726 = 0,7071$.

La valeur critique donnée par Williams est $\bar{t}_{1,5\%} = 1,645$, et la concentration 0,25 ppm ne diffère donc pas significativement du contrôle au seuil de 5%.

Bibliographie.

Bretz, F. (1999). Powerful Modifications of Williams' Test on Trend, P.H.D Thesis, Hannover University.

House, D.E. (1986). A nonparametric version of Wilcoxon's test for randomized block design. Biometrics 42, 187-190.

Shirley, E. (1977). A nonparametric equivalent of Williams' test for contrasting increasing dose levels of a treatment. Biometrics 33, 386-389.

Williams, D.A. (1971). A test for differences between treatment means when several dose levels are compared with a zero-dose control. *Biometrics* 27, 103-117.

Williams, D.A. (1972). The comparison of several dose levels with a zero-dose control. *Biometrics* 28, 519-531.

Williams, D.A. (1986). A note on Shirley's nonparametric test for comparing several dose levels with a zero-dose control. *Biometrics* 42, 183-186.