Le test de Wilcoxon Mann Whitney

F.-G. Carpentier

16/07/2015

1 Introduction

Soient deux variables statistiques X_1 et X_2 définies sur deux populations P_1 et P_2, à valeurs numériques, continues et de médianes respectives θ_1 et θ_2.
On considère des échantillons G_1 et G_2 de tailles n_1 et n_2 tirés au hasard respectivement dans les populations P_1 et P_2. Soient $(x_{i1})_{1\leq i\leq n_1}$ $(x_{j2})_{1\leq j\leq n_2}$ les valeurs observées des variables X_1 et X_2 sur les deux échantillons. On suppose les variables continues et les populations de taille infinie, de sorte que la probabilité de tirer des ex aequo est nulle. On se propose de construire un test statistique non paramétrique permettant de choisir entre l'hypothèse nulle :

$H_0 : \theta_1 = \theta_2$ (égalité des médianes dans les populations parentes)

et l'une des hypothèses alternatives :

$H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$, $H_1 : \theta_1 < \theta_2$, $H_1 : \theta_1 > \theta_2$.

2 La statistique U de Mann et Whitney

Pour chaque valeur x_{i1} observée sur le premier échantillon, on évalue le nombre d'observations du deuxième échantillon qui la précèdent. Autrement dit, pour $1 \leq i \leq n_1$, on évalue le cardinal :

$$u_i = \#\{x_{j2}/x_{j2} < x_{i1}, 1 \leq j \leq n_2\}$$

On définit alors la statistique U_1 de Mann-Whitney par :

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n_1} u_i$$

En échangeant le rôle des deux échantillons, on peut calculer également, pour $1 \leq j \leq n_2$:

$$u'_j = \#\{x_{i1}/x_{i1} < x_{j2}, 1 \leq i \leq n_1\}$$

et

$$U_2 = \sum_{j=1}^{n_2} u'_j$$

2.1 Etude des statistiques U_1 et U_2

2.1.1 Domaine de variation de U_1

U_1 a pour minimum 0 (atteint si pour tout (i, j), $x_{i1} < x_{j2}$) et comme maximum n_1n_2 (atteint si pour tout (i, j), $x_{i1} > x_{j2}$). De plus, on vérifie facilement que $U_1 + U_2 = n_1n_2$. En effet, si l'on effectue successivement les n_1n_2 comparaisons, chacune d'elles contribue d'une unité à la valeur de U_1 si $x_{j2} < x_{i1}$ et d'une unité à la valeur de U_2 si $x_{j2} > x_{i1}$.

2.1.2 Moyenne de U_1

Sous l'hypothèse H_0 d'homogénéité des distributions de X_1 et X_2 (c'est-à-dire d'égalité des deux fonctions de répartition F_1 et F_2 : $\forall x \; F_1(x) = F_2(x)$), on a, pour chaque élément x_{i1} observé dans le premier échantillon et chaque élément x_{j2} observé dans le second échantillon : $P(x_{i1} < x_{j2}) = P(x_{i1} > x_{j2}) = \frac{1}{2}$. Une comparaison est une épreuve de Bernouilli et U_1 est la somme de n_1n_2 variables de Bernouilli de paramètre $p = 0.5$. On en déduit que la moyenne de U_1 est $\overline{U_1} = \frac{n_1n_2}{2}$.

2.1.3 Variance de U_1

En revanche, les n_1n_2 variables de Bernouilli considérées ne sont pas indépendantes. Le calcul de la variance de U_1 exige donc quelques étapes supplémentaires.
Notons d_{ij} la variable de Bernouilli associée à la comparaison de x_{i1} et x_{j2}. Avec cette notation : $U_1 = \sum_i \sum_j d_{ij}$ et on peut écrire :

$$Var(U_1) = \sum_{i,j} Var(d_{ij}) + \sum_{(i,j)\neq(i',j')} Cov(d_{ij}, d_{i'j'})$$

ou encore :

$$Var(U_1) = \sum_{i,i',j',j'} Cov(d_{ij}, d_{i'j'})$$

Evaluons les covariances $Cov(d_{ij}, d_{i'j'})$:
– Si $(i,j) = (i',j')$, alors $Cov(d_{ij}, d_{ij}) = Var(d_{ij}) = \frac{1}{4}$
– Si $i \neq i'$ et $j \neq j'$ alors les deux comparaisons (x_{i1} v/s x_{j2}) et ($x_{i'1}$ v/s $x_{j'2}$) sont indépendantes, et il en est de même des variables d_{ij} et $d_{i'j'}$. D'où, dans ce cas, $Cov(d_{ij}, d_{i'j'}) = 0$.
– Si $i = i'$ et $j \neq j'$: supposons les notations choisies de façon que $x_{j_2} < x_{j'2}$. Les trois événements $(x_{i1} < x_{j2} < x_{j'2})$, $(x_{j2} < x_{i1} < x_{j'2})$ et $(x_{j2} < x_{j'2} < x_{i1})$ sont alors équiprobables, de probabilité $\frac{1}{3}$. La loi de la variable $d_{ij} + dij'$ est donnée par $P(d_{ij} + dij' = 2) = P(d_{ij} + dij' = 1) = P(d_{ij} + dij' = 0) = \frac{1}{3}$ et sa variance par : $Var(d_{ij} + d_{ij'}) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{0}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}$. D'où :

$$Cov(d_{ij}, d_{ij'}) = \frac{1}{2}\left[Var(d_{ij} + d_{ij'}) - Var(d_{ij}) - Var(d_{ij'})\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

– Si $i \neq i'$ et $j = j'$, on obtient de même : $Cov(d_{ij}, d_{i'j}) = \frac{1}{12}$.
La somme $\sum_{i,i',j',j'} Cov(d_{ij}, d_{i'j'})$ comprend :

- n_1n_2 termes pour lesquels $i = i'$ et $j \neq j'$
- $n_1n_2(n_2 - 1)$ termes pour lesquels $i = i'$ et $j = j'$
- $n_1(n_1 - 1)n_2$ termes pour lesquels $i \neq i'$ et $j = j'$
- et, pour mémoire, $n_1(n_1 - 1)n_2(n_2 - 1)$ termes pour lesquels $i \neq i'$ et $j \neq j'$.

Par conséquent :

$$Var(U_1) = \frac{1}{4}n_1n_2 + \frac{1}{12}n_1n_2(n_2 - 1) + \frac{1}{12}n_1(n_1 - 1)n_2 = \frac{n_1n_2}{12}(3 + n_2 - 1 + n_1 - 1)$$

$$Var(U_1) = \frac{n_1n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}$$

2.1.4 Détermination d'une formule de récurrence permettant de calculer la loi de U_1

Dans ce paragraphe, notons $U_1(n_1, n_2)$ la statistique de Mann-Whitney car nous serons amenés à faire varier les tailles des échantillons et distinguons la statistique $U_1(n_1, n_2)$ de sa valeur u sur un couple d'échantillons donné. Nous reprenons ici la démonstration donnée par Mann et Whitney dans [Mann-Whitney].
La valeur u de la statistique $U_1(n_1, n_2)$ peut encore être obtenue de la manière suivante :
Considérons la *suite ordonnée* des n_1+n_2 valeurs observées et recodons cette suite en remplaçant chaque terme par "0" s'il correspond à une observation du premier échantillon et par "1" s'il correspond à une observation du deuxième échantillon. La valeur u de la statistique $U_1(n_1, n_2)$ est alors le nombre de fois où un "1" précède un "0" dans cette nouvelle suite.
Soit $\#\,[U_1(n_1, n_2) = u]$ le nombre de suites de n_1 "0" et n_2 "1" dans lesquelles un "1" précède un "0" u fois. De plus, convenons que $\#\,[U_1(n_1, n_2) = u] = 0$ si $u < 0$ ou si $u > n_1 n_2$.
Examinons les suites obtenues en supprimant le dernier terme de la suite considérée.
– Si ce dernier terme est un "1", la valeur de la statistique U_1 associée est inchangée. Le nombre de telles suites est : $\#\,[U_1(n_1, n_2 - 1) = u]$.
– Si ce dernier terme est un "0", la valeur de la statistique U_1 associée est $u-n_2$. Cette alternative n'est possible que si $u \geq n_2$ puisque la contribution du dernier "0" à la valeur de $U_1(n_1, n_2)$ est égale à n_2. Mais, avec la convention posée ci-dessus, le nombre de telles suites est, dans tous les cas : $\#\,[U_1(n_1 - 1, n_2) = u - n_2]$.
D'où la relation de récurrence :

$$\#\,[U_1(n_1, n_2) = u] \;=\; \#\,[U_1(n_1, n_2 - 1) = u] + \#\,[U_1(n_1 - 1, n_2) = u - n_2]$$

Le nombre total de suites comportant n_1 "0" et n_2 "1" est $C_{n_1+n_2}^{n_1}$. Sous l'hypothèse nulle H_0, toutes ces suites ont la même probabilité d'apparition et on a donc :

$$\begin{aligned}
P\,[U_1(n_1, n_2) = u] \;&=\; \frac{n_1! n_2!}{(n_1 + n_2)!} \#\,[U_1(n_1, n_2) = u] \\
P\,[U_1(n_1, n_2 - 1) = u] \;&=\; \frac{n_1!(n_2 - 1)!}{(n_1 + n_2 - 1)!} \#\,[U_1(n_1, n_2 - 1) = u] \\
P\,[U_1(n_1 - 1, n_2) = u - n_2] \;&=\; \frac{(n_1 - 1)! n_2!}{(n_1 + n_2 - 1)!} \#\,[U_1(n_1 - 1, n_2) = u - n_2]
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de la relation de récurrence précédente par $\frac{n_1! n_2!}{(n_1 + n_2)!}$ on obtient donc :

$$P\,[U_1(n_1, n_2) = u] \;=\; \frac{n_2}{n_1 + n_2} P\,[U_1(n_1, n_2 - 1) = u] + \frac{n_1}{n_1 + n_2} P\,[U_1(n_1 - 1, n_2) = u - n_2]$$

L'amorçage de la récurrence peut être fait en déterminant les valeurs de $P\,[U_1(n_1, 1) = u]$ et de $P\,[U_1(1, n_2) = u]$.
Pour $n_2 = 1$, les suites sont composées de n_1 "0" et d'un "1". Il y a $C_{n_1+1}^{1} = n_1 + 1$ telles suites, équiprobables et conduisant aux $n_1 + 1$ valeurs $u = 0, 1, \ldots, n_1$. D'où, pour $u = 0, 1, \ldots, n_1$:

$$P\,[U_1(n_1, 1) = u] \;=\; \frac{1}{n_1 + 1}$$

On vérifie de même que, pour $u = 0, 1, \ldots, n_2$:

$$P\,[U_1(1, n_2) = u] \;=\; \frac{1}{n_2 + 1}$$

3 Calcul sous R de la loi de U

Sans recherche d'efficacité dans le calcul, on peut utiliser la relation de récurrence précédente pour calculer la loi de U_1 à l'aide du programme R suivant :

```
mwu.dist <- function (n,m,k) {
    if ((k < 0)|(k> n*m))
     {res <- 0}
    else
     {if (n==1)
         {res <- 1/(m+1)}
            else
               {if (m==1)
                 {res <- 1/(n+1)}
          else
           {res <- n/(n+m)*mwu.dist(n-1,m,k-m)+m/(n+m)*mwu.dist(n,m-1,k)}
         }
           }
  return(res)
}
```

Le temps d'exécution de la fonction précédente pourra être considérablement réduit en construisant une table de hachage mémorisant les valeurs déjà déterminées de mwu.dist(n,m,k). Cela peut être réalisé à l'aide du programme R suivant :

```
library(hash)

# Instruction à exécuter si le cache n'existe pas encore, ou contient autre chose
# que les listes d'associations (paramètres, valeur) de la fonction mwu.dist :
# cache <- hash()

# Distribution du U de Mann-Whitney
mwu.dist <- function (n,m,k) {
    key = toString(c(n,m,k))
    if (has.key(key, cache)){
        res <- values(cache[key])[[1]]
        return(res)
    }
    if ((k < 0)|(k> n*m))
       {res <- 0}
    else
       {if (n==1)
           {res <- 1/(m+1)}
            else
               {if (m==1)
                 {res <- 1/(n+1)}
            else
             {
                n1 = n-1
                m1 = m
                k1 = k-m
                val1 = mwu.dist(n1, m1, k1)
                if (!((k1 < 0) | (k1 > n1 * m1))){
```

```
                    key1 = toString(c(n1, m1, k1))
                    cache[key1] <<- val1
                }
                n2 = n
                m2 = m-1
                k2 = k
                val2 = mwu.dist(n,m-1,k)
                if (!((k2 < 0) | (k2 > n2 * m2))){
                    key2 = toString(c(n2, m2, k2))
                    cache[key2] <<- val2
                }
                res <- n/(n+m)*val1+m/(n+m)*val2}
            }
          }
    return(res)
}
```

Ces deux programmes, ainsi que des programmes permettant de calculer les lois cumulatives et les valeurs critiques pour un seuil donné, pour U_1 et pour W_1 sont fournis en annexe dans les fichiers wmw.dis.1.Rd et wmw.dist.2.Rd.

4 La statistique W de Wilcoxon

Sous les hypothèses précédentes, Wilcoxon (cf. [Wilcoxon]) a proposé une autre statistique de test.
Etant donné la suite ordonnée des observations $(x_{i1})_{1\leq i\leq n_1}$, $(x_{j2})_{1\leq j\leq n_2}$, on construit le protocole des rangs des n_1+n_2 observations. Comme il est d'usage en statistiques, le rang 1 est attribué à la plus petite des observations. Notons $(r_{i1})_{1\leq i\leq n_1}$ les rangs des observations du premier échantillon et $(r_{j2})_{1\leq j\leq n_2}$ les rangs des observations du deuxième échantillon. On utilise alors comme statistiques :

$$W_1=\sum_{i=1}^{n_1} r_{i1} \quad ; \quad W_2=\sum_{j=1}^{n_2} r_{j2}$$

Ces deux statistiques sont liées par la relation :

$$W_1+W_2=\frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2}$$

On peut montrer que U_1 et W_1 sont liées par la relation :

$$W_1=\frac{n_1(n_1+1)}{2}+U_1$$

En effet, considérons un élément x_{i1} du premier échantillon. Soit s_{i1} son rang dans le premier échantillon seul, et r_{i1} son rang dans la suite formée par la réunion des deux échantillons. On sait que $r_{i1}\geq s_{i1}$ et la différence entre les deux rangs est égale au nombre d'observations du deuxième échantillon qui sont inférieures à x_{i1}. Autrement dit :

$$r_{i1}=s_{i1}+\#\{x_{j2}/x_{j2}<x_{i1}/1\leq j\leq n_2\}$$

soit, avec les notations précédentes :

$$r_{i1}=s_{i1}+u_i$$

Par conséquent :

$$W_1 = \sum_i r_{i1} = \sum_i s_{i1} + \sum_i u_i = \frac{n_1(n_1+1)}{2} + U_1$$

Remarque. Dans de nombreux exposés (notamment dans le cours disponible sur le présent site), on trouve la relation :

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - W_1$$

Cette dernière relation correspond à la relation précédente, mais avec une permutation des rôles de U_1 et U_2. En fait, à la suite de Mann et Whitney, on considère souvent comme statistique de test $U = Min(U_1, U_2)$. La permutation précédente des rôles de U_1 et U_2 est alors sans effet.

5 Tables pour le test de Wilcoxon Mann Whitney

Nous avons construit des tables pour la statistique W_1 de Wilcoxon, pour $1 \leq n_1 \leq 25$ et $1 \leq n_2 \leq 25$ et pour les seuils unilatéraux à gauche et à droite de 5%, 2.5%, 1%, 0.5%. Les tables relatives aux seuils de 2.5% et 0.5% peuvent servir à réaliser des tests bilatéraux aux seuils de 5% et 1%. Pour l'essentiel, on retrouve les résultats indiqués dans les tables classiques (celles accompagnant les cours présents sur ce site). On trouvera néanmoins quelques écarts d'une unité sur la valeur de W_{crit} dans les situations où le niveau de significativité de la valeur indiquée dans les tables classiques est exactement égale au seuil considéré.
Ces tables sont rassemblées dans le fichier TablesWMW.pdf. Le programme *R* qui a permis de les construire est wmw.dist.3.Rd.

6 Approximation par une loi normale

6.1 Les statistiques Z_1 et Z_2

On peut également considérer les statistiques suivantes :

$$Z_1 = \frac{U_1 - \frac{n_1 n_2}{2}}{E_1} \quad \text{avec} \quad E_1^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$$

$$Z_2 = \frac{\overline{R_1} - \overline{R_2}}{E_2} \quad \text{avec} \quad E_2^2 = \frac{(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2)^2}{12 n_1 n_2}$$

Dans cette dernière statistique, $\overline{R_1}$ et $\overline{R_2}$ désignent les rangs moyens $\frac{W_1}{n_1}$ et $\frac{W_2}{n_2}$ dans les deux groupes.
Ces deux statistiques sont en fait égales. En effet, calculons $n_1 n_2(\overline{R_1} - \overline{R_2})$ en utilisant l'égalité : $W_1 + W_2 = \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2}$:

$$n_1 n_2(\overline{R_1} - \overline{R_2}) = n_2 W_1 - \frac{n_1(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2} + n_1 W_1$$

$$n_1 n_2(\overline{R_1} - \overline{R_2}) = (n_1+n_2) W_1 - (n_1+n_2)\frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}$$

$$n_1 n_2(\overline{R_1} - \overline{R_2}) = (n_1+n_2) W_1 - (n_1+n_2)\frac{n_1(n_1+1)}{2} - (n_1+n_2)\frac{n_1 n_2}{2}$$

D'où :

$$n_1 n_2(\overline{R_1} - \overline{R_2}) = (n_1+n_2)\left(U_1 - \frac{n_1 n_2}{2}\right)$$

$$\overline{R_1} - \overline{R_2} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\left(U_1 - \frac{n_1 n_2}{2}\right)$$

$$\frac{\overline{R_1} - \overline{R_2}}{\left(\frac{(n_1+n_2+1)(n_1+n_2)^2)}{12n_1n_2}\right)^{1/2}} = \left(\frac{12n_1n_2}{(n_1+n_2+1)(n_1+n_2)^2)}\right)^{1/2} \frac{n_1+n_2}{n_1n_2}\left(U_1 - \frac{n_1n_2}{2}\right)$$

$$\frac{\overline{R_1} - \overline{R_2}}{\left(\frac{(n_1+n_2+1)(n_1+n_2)^2)}{12n_1n_2}\right)^{1/2}} = \left(\frac{12}{(n_1+n_2+1)n_1n_2}\right)^{1/2} \left(U_1 - \frac{n_1n_2}{2}\right)$$

D'où finalement :

$$Z_2 = Z_1$$

Notons Z cette statistique. Sous H_0, Il s'agit évidemment d'une variable centrée réduite et pour n_1 et n_2 suffisamment grands, la loi suivie par Z est approximativement une loi normale. On trouvera dans l'un des documents annexes une comparaison entre les niveaux de significativité des valeurs critiques de W_1 et ceux de Z, pour les seuils de 5% et 1%. Mann et Whitney indiquent $n_1 \geq 8$ et $n_2 \geq 8$ comme condition pour utiliser l'approximation par la loi normale.

Nous avons voulu tester la qualité de cette approximation. A cet effet, nous avons constitué deux tableaux, correspondant aux seuils de 5% et 1% unilatéraux, donnant pour $1 \leq n_1 \leq 50$ et $n_1 \leq n_2 \leq 50$ les valeurs de :
- n_1 et n_2
- La plus grande valeur W significative à gauche : W_{crit}
- La plus petite valeur W non significative à gauche : $W_{crit} + 1$
- Les niveaux de significativité des deux valeurs précédentes de W
- Les valeurs de Z correspondant à W_{crit} et $W_{crit} + 1$
- Les niveaux de significativité correspondants pour une loi normale centrée réduite
- Les valeurs de Z correspondant à W_{crit} et $W_{crit} + 1$, avec application de la correction de continuité correspondant à la deuxième formule indiquée au paragraphe suivant.
- Les niveaux de significativité correspondant à ces valeurs ajustées de Z.

Dans une situation idéale, pour chacune des statistiques considérées (W, Z, Z ajustée), les niveaux de significativité devraient encadrer le seuil α choisi. Cette condition est évidemment réalisée pour la statistique W. Pour la statistique Z et le seuil $\alpha = 5\%$, on constate d'assez nombreuses anomalies, y compris pour des valeurs de n_1 et n_2 élevées. Cependant, les niveaux de significativité restent proches du seuil. Pour le seuil de 5%, le résultat est plus satisfaisant pour la statistique Z ajustée. En revanche, au seuil de 1%, les statistiques Z et Z ajustée conduisent assez systématiquement à des niveaux de significativité supérieurs à 1%. Autrement dit, il semblerait que la loi de W soit moins aplatie que la loi normale et le passage à la loi normale se traduit par une perte de puissance du test. On notera que pour ce seuil, les meilleurs résultats sont obtenus sans procéder à une correction de continuité.
Ces résultats pourront être consultés dans les tableaux tabcomp1.xlsx et tabcomp5.xlsx, produits par l'exécution du programme wmw.dist.4.Rd. Ces fichiers sont fournis en annexe au présent document.

6.2 Correction de continuité

Différents auteurs proposent d'introduire une correction de continuité dans les statistiques précédentes.
Par exemple, R. Rakotomalala [Rakotomalala] indique la formule suivante pour Z_1 :

$$|Z'_1| = \frac{|U_1 - \frac{n_1n_2}{2}| - 0.5}{E_1} \quad \text{avec} \quad E_1^2 = \frac{n_1n_2(n_1+n_2+1)}{12}$$

De même, les versions les plus récentes de Statistica calculent la statistique Z_2 à l'aide de la formule :

$$|Z_2'| = \frac{\left|\overline{R_1} - \overline{R_2}\right| - 0.5\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}{E_2} \quad \text{avec} \quad E_2^2 = \frac{(n_1+n_2+1)(n_1+n_2)^2}{12n_1n_2}$$

7 Correction pour ex aequo

D'après les hypothèses du test (on suppose que X_1 et X_2 sont des variables continues), il n'existe aucun ex aequo, ni à l'intérieur d'un échantillon, ni entre les deux échantillons. Cependant, ce test est souvent utilisé dans des situations où, compte tenu de la précision avec laquelle les valeurs observées de X_1 et X_2 sont obtenues, les ex aequo sont présents, et parfois en assez grand nombre.
C'est pourquoi certains auteurs ont proposé une correction pour ex aequo, applicable lorsqu'on utilise l'approximation par une loi normale. Nous n'avons pas étudié en détail les fondements théoriques de cette correction, généralement décrite de la façon suivante :

> On calcule le protocole des rangs en appliquant la règle du rang moyen pour les ex aequo et on substitue à la variance E_2^2 de la formule donnant Z_2 la quantité $\tilde{E_2^2}$ donnée par :
>
> $$\tilde{E_2^2} = E_2^2 \times \left(1 - \frac{\sum_{g=1}^{G} t_g(t_g^2 - 1)}{n^3 - n}\right)$$
>
> où $n = n_1 + n_2$ est l'effectif total, G est le nombre de valeurs distinctes dans la réunion des deux échantillons et t_g est le nombre d'observations associé à la valeur n° g.

De fait, cette correction revient à multiplier la statistique Z par $\frac{s}{s'}$ où s est l'écart type de la série à valeurs entières $\{1, 2, \ldots, n_1 + n_2\}$ et s' l'écart type de la série des rangs réels obtenus par application de la règle du rang moyen pour les ex aequo.

Références

[Mann-Whitney] H.B. Mann, D.R. Whitney, *On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other*, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 18, No 1 (1947), pp. 50-60.

[Rakotomalala] R. Rakotomalala, *Comparaison de populations. Tests non paramétriques*, Université Lumière Lyon 2 (2008), Document consulté en ligne le 16/07/2015 à l'adresse : http ://eric.univ-lyon2.fr/~ricco/cours/cours/Comp_Pop_Tests_Nonparametriques.pdf.

[Wilcoxon] F. Wilcoxon, *Individual comparisons by ranking methods*, Biometrics Bull., Vol. 1 (1945), pp. 80-83.