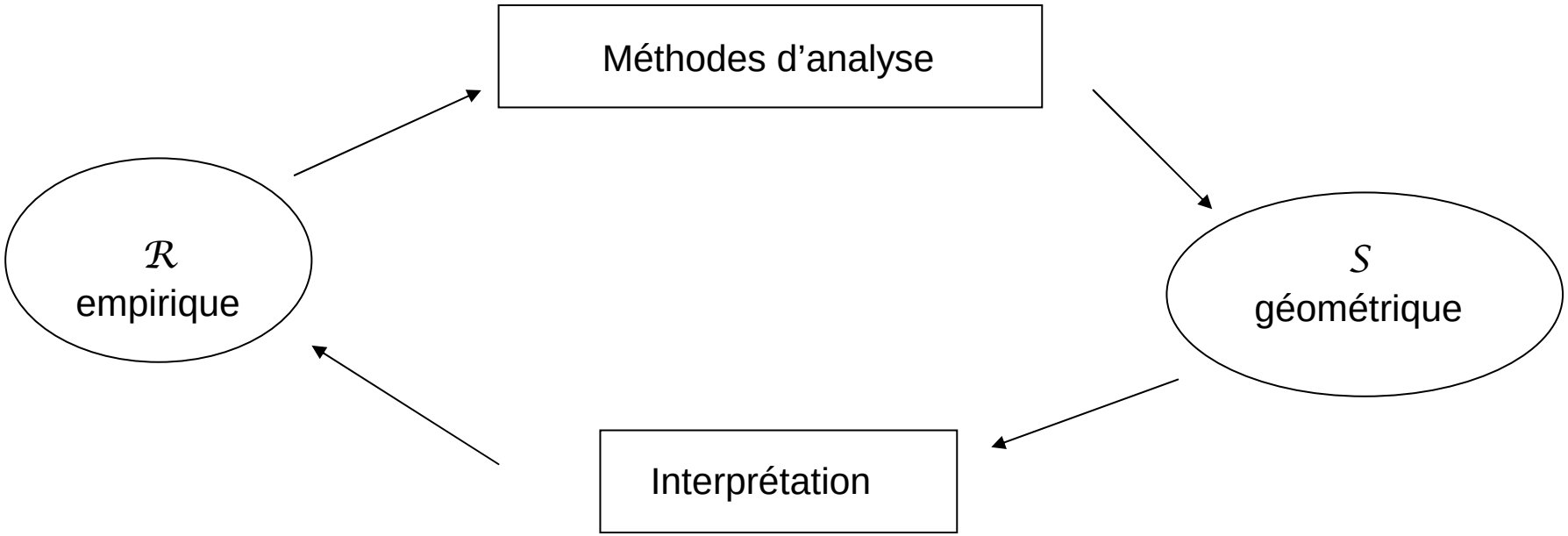
Analyse multidimensionnelle des données

F.-G. Carpentier

2013/2014

Analyse multidimensionnelle des données : de quoi s'agit-il ?



Exemples de données relevant de l'analyse multidimensionnelle

Consommations annuelles de 8 types de denrées alimentaires pour 8 catégories socio-professionnelles

	PAO	PAA	VIO	VIA	POT	LEC	RAI	PLP
AGRI	167	1	163	23	41	8	6	6
SAAG	162	2	141	12	40	12	4	15
PRIN	119	6	69	56	39	5	13	41
CSUP	87	11	63	111	27	3	18	39
CMOY	103	5	68	77	32	4	11	30
EMPL	111	4	72	66	34	6	10	28
OUVR	130	3	76	52	43	7	7	16
INAC	138	7	117	74	53	8	12	20

Source : Saporta, 1990

Variables :

PAO	Pain ordinaire
PAA	Autre pain
VIO	Vin ordinaire
VIA	Autre vin
POT	Pommes de terre
LEC	Légumes secs
RAI	Raisin de table
PLP	Plats préparés

Observations :

AGRI	Exploitants agricoles
SAAG	Salariés agricoles
PRIN	Professions indépendantes
CSUP	Cadres supérieurs
CMOY	Cadres moyens
EMPL	Employés
OUVR	Ouvriers
INAC	Inactifs

Exemples de données relevant de l'analyse multidimensionnelle

Tableau de contingence : répartition d'étudiants en 1975-1976

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	80	99	65	58
Patron	168	137	208	62
Cadre sup.	470	400	876	79
Employé	145	133	135	54
Ouvrier	166	193	127	129

Cité par Saporta (1990)

Exemples de données relevant de l'analyse multidimensionnelle

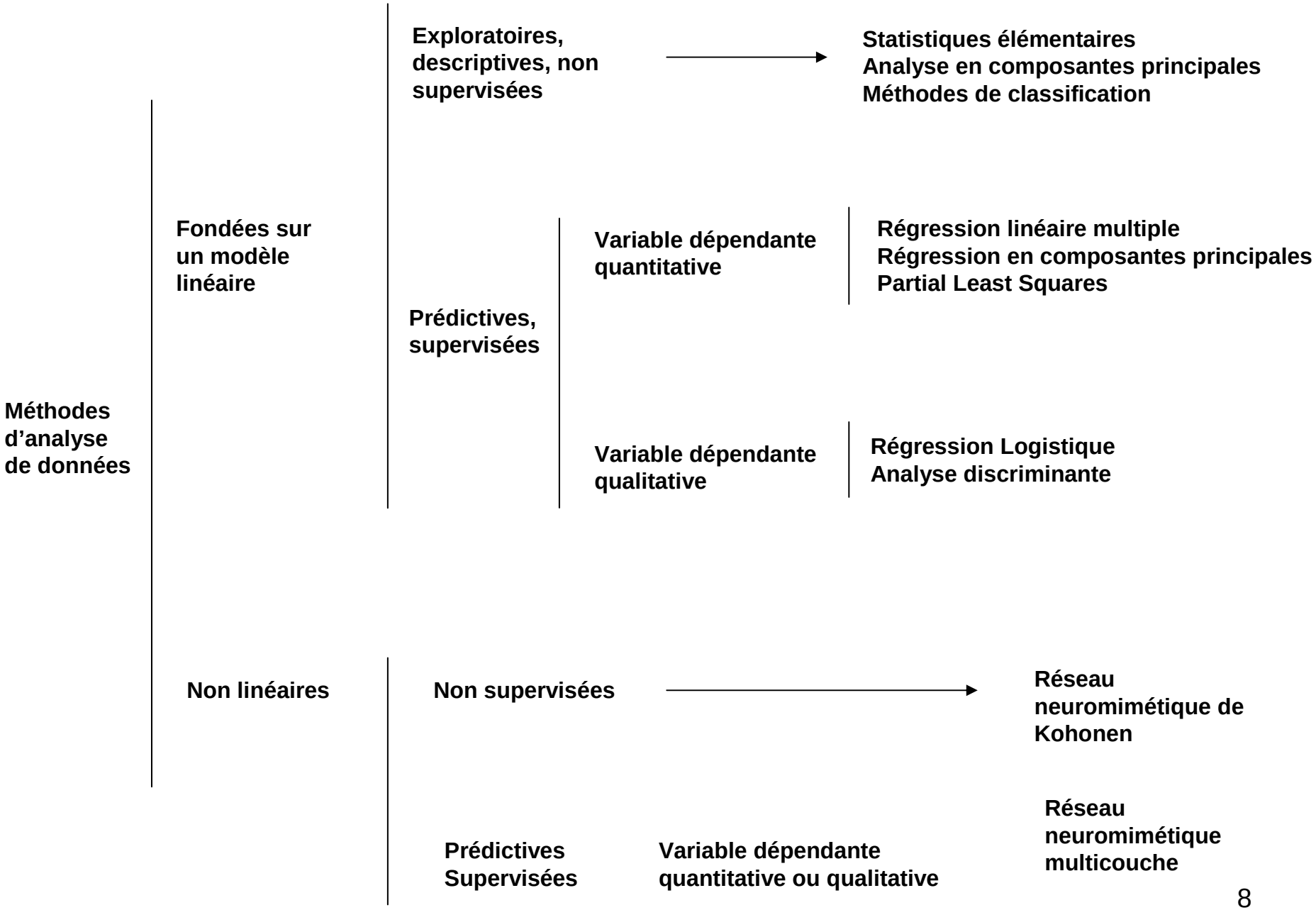
Questions à réponses fermées : sexe (2 modalités), niveau de revenu (2 modalités), préférence (3 modalités)

	1 Sexe	2 Revenu	3 Preference
s1	F	M	A
s2	F	M	A
s3	F	E	B
s4	F	E	C
s5	F	E	C
s6	H	E	C
s7	H	E	B
s8	H	M	B
s9	H	M	B
s10	H	M	A

Exemples de données relevant de l'analyse multidimensionnelle

-Tableau individus x variables comportant des variables numériques et une variable dichotomique

	Age	Etat-Civil	Feministe	Frequence	Agressivite	Harcelement
1	13	1	102	2	4	**0**
2	45	2	101	3	6	**0**
3	19	2	102	2	7	**1**
4	42	2	102	1	2	**1**
5	27	1	77	1	1	**0**
6	19	1	98	0	6	**1**
7	37	1	96	1	6	**0**


Méthodes d'analyse de données
Fondées sur un modèle linéaire
Exploratoires, descriptives, non supervisées
Statistiques élémentaires
Analyse en composantes principales
Méthodes de classification
Prédictives, supervisées
Variable dépendante quantitative
Régression linéaire multiple
Régression en composantes principales
Partial Least Squares
Variable dépendante qualitative
Régression Logistique
Analyse discriminante
Non linéaires
Non supervisées
Réseau neuromimétique de Kohonen
Prédictives Supervisées
Variable dépendante quantitative ou qualitative
Réseau neuromimétique multicouche

Méthodes abordées dans ce cours :

- ACP, analyse factorielle exploratoire, analyse factorielle confirmatoire
- AFC et ACM
- Classification par moyennes mobiles (k-means) et CAH
- Régression linéaire, régression linéaire pas à pas, analyse de médiation
- Régression logistique
- Analyse discriminante décisionnelle, analyse factorielle discriminante
- Aperçus sur régression PLS et analyse de segmentation

[Doise] : trois notions fondamentales dans l'approche multivariée des différences individuelles : *niveau, dispersion, corrélation*

Niveau : *moyenne*

Dispersion : *variance, écart type, somme des carrés*

Corrélation : *coefficient de corrélation*

Cas 1

Ind.	V1	V2	V3
1	20	40	60
2	40	60	80
3	20	40	60
4	40	60	80
Moy	**30**	**50**	**70**
s	**10**	**10**	**10**
CORRÉLATIONS			
	V1	V2	V3
V1	1		
V2	1	1	
V3	1	1	1

Cas 2

Ind.	V1	V2	V3
1	60	40	60
2	40	60	60
3	40	60	40
4	60	40	40
Moy	**50**	**50**	**50**
s	**10**	**10**	**10**
CORRÉLATIONS			
	V1	V2	V3
V1	1		
V2	-1	1	
V3	0	0	1

Cas 3

Ind.	V1	V2	V3
1	40	35	30
2	60	65	70
3	40	35	30
4	60	65	70
Moy	**50**	**50**	**50**
s	**10**	**15**	**20**
CORRÉLATIONS			
	V1	V2	V3
V1	1		
V2	1	1	
V3	1	1	1

Cas 4

Ind.	V1	V2	V3
1	60	35	10
2	80	65	50
3	60	35	10
4	80	65	50
Moy	**70**	**50**	**30**
s	**10**	**15**	**20**
CORRÉLATIONS			
	V1	V2	V3
V1	1		
V2	1	1	
V3	1	1	1

Tableau de données numériques à n lignes et p colonnes : *matrice de dimensions (n, p).*

Une ligne du tableau peut être représentée comme un point dans un espace géométrique à p dimensions, une colonne comme un point dans un espace géométrique à n dimensions

Distance entre deux individus : souvent la distance euclidienne :

$$M_i M_j^2 = \sum_{k=1}^{p} \left(x_{ik} - x_{jk} \right)^2$$

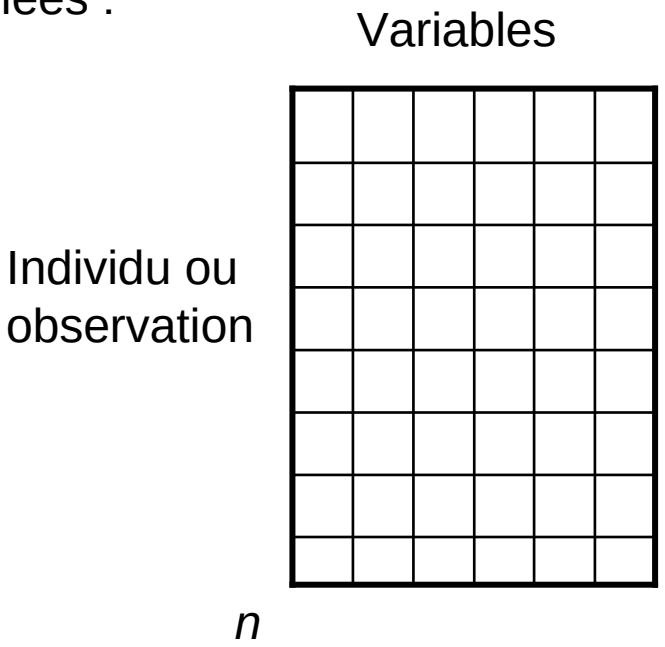
Inertie d'un nuage de points par rapport à un point O : somme des carrés des distances à O. Inertie par rapport au point moyen du nuage: *somme des carrés ou variation totale*.

Lien entre deux variables : *coefficient de corrélation*. Interprétation géométrique : c'est le *cosinus* de l'angle entre les vecteurs représentant ces variables.

Analyse en Composantes Principales

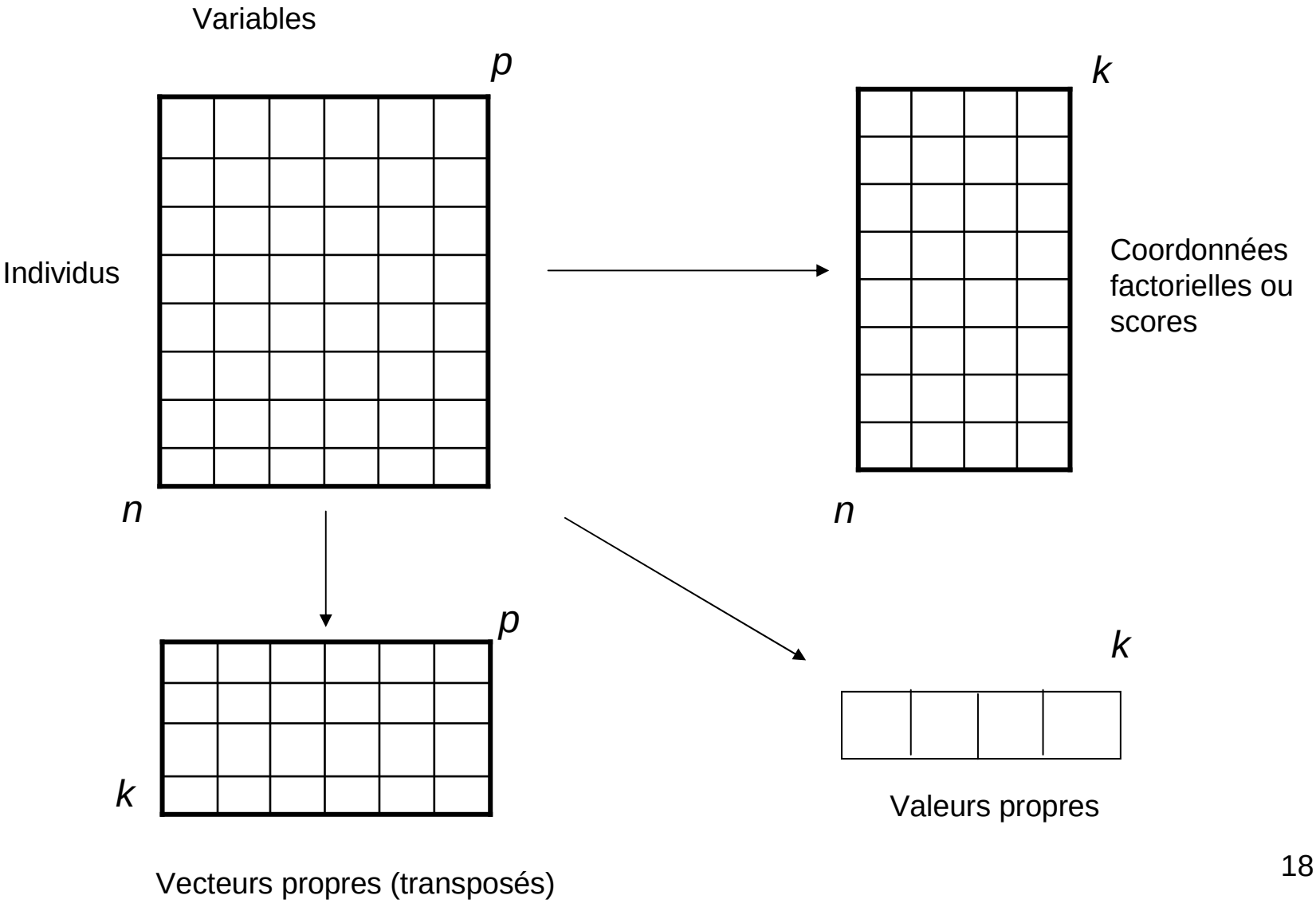
Analyse en composantes principales

Données :



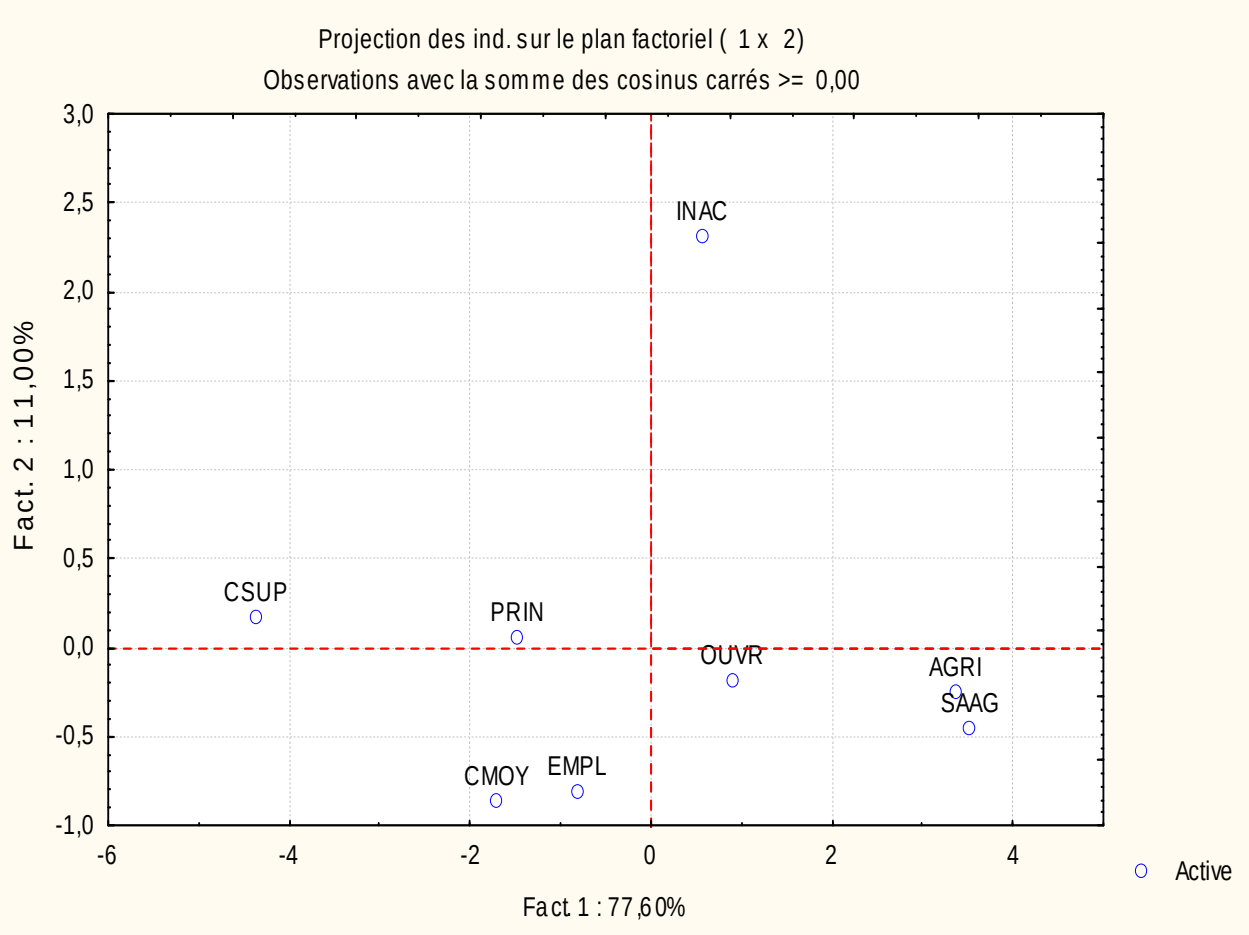
Elément de cette matrice : x_{ij}

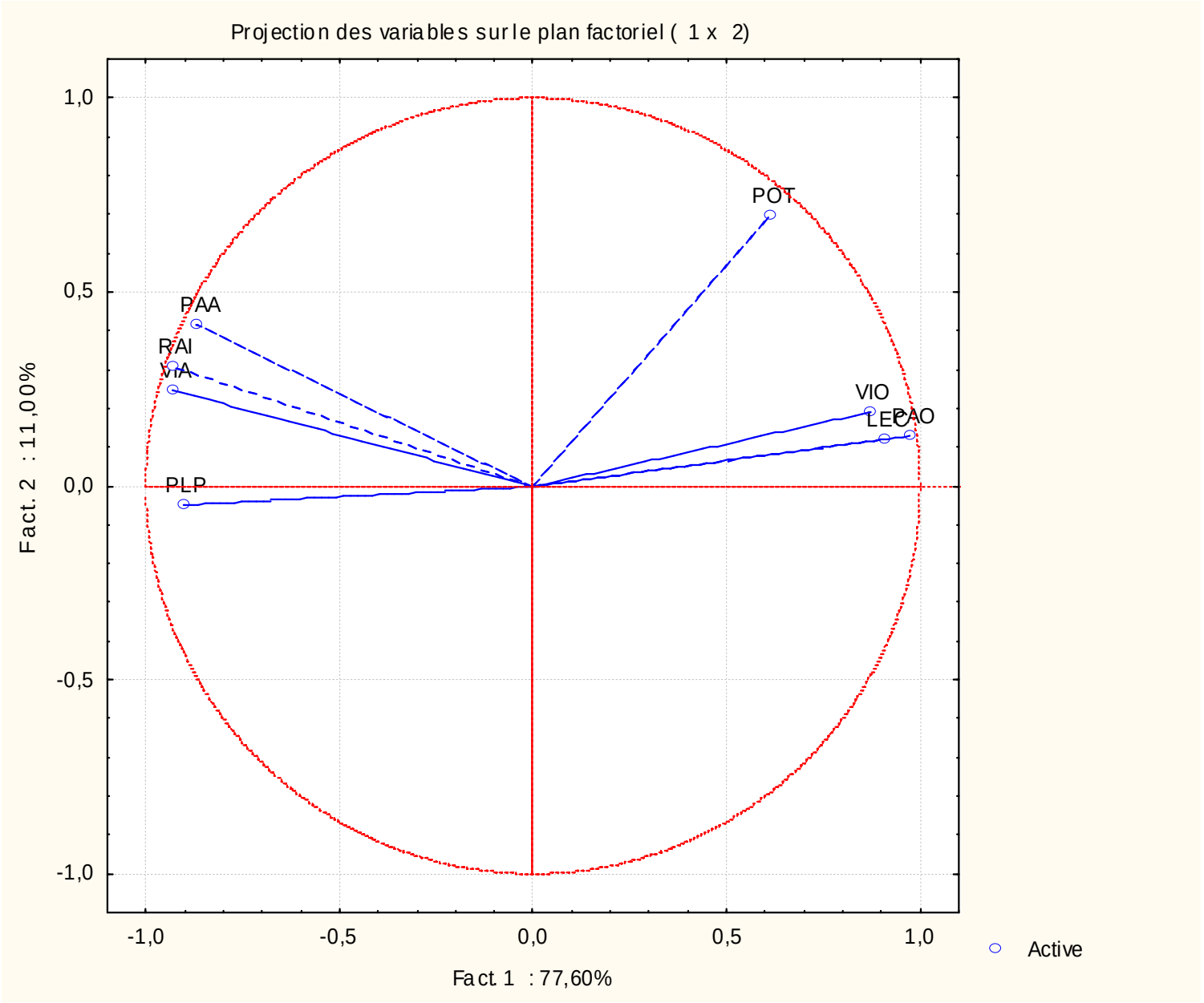
Principaux résultats d'une ACP

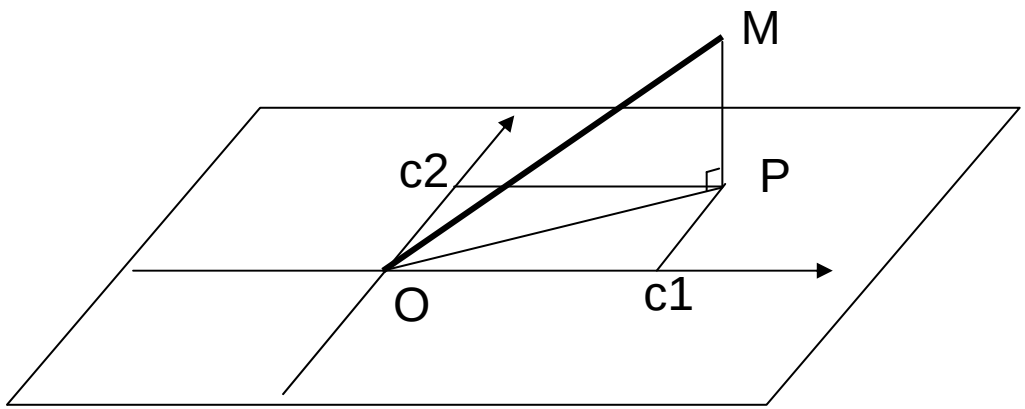


Principe de la méthode

- Calcul des distances entre individus
- Recherche des directions de plus grande dispersion du nuage de points : axes factoriels
    - Plus grande dispersion : moindre déformation
    - Meilleur respect des distances entre individus
    - Maximisation de l'inertie du nuage projeté
- On procède axe par axe, mais les propriétés restent vraies pour le premier plan factoriel, le premier espace factoriel de dimension 3, etc


Projection des ind. sur le plan factoriel (1 x 2)
Observations avec la somme des cosinus carrés >= 0,00
Fact. 2 : 11,00%
Fact. 1 : 77,60%
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
-6
-4
-2
0
2
4
INAC
CSUP
PRIN
OUVR
AGRI
SAAG
CMOY
EMPL
Active


Projection des variables sur le plan factoriel (1 x 2)
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
Fact. 2 : 11,00%
POT
PAA
RAI
VIA
VIO
LEC
PAO
PLP
-1,0
-0,5
0,0
0,5
1,0
Fact. 1 : 77,60%
Active



Cosinus carrés

$$Cos^2(\overrightarrow{OM}, CP_1) = \frac{Oc_1^2}{OM^2}$$

$$Cos^2(\overrightarrow{OM}, CP_2) = \frac{Oc_2^2}{OM^2}$$

- $\overrightarrow{OM}$: vecteur de l'observation
- $\overrightarrow{OP}$: vecteur de la projection sur le plan factoriel
- $\overrightarrow{Oc_1}$: projection sur l'axe 1
- $\overrightarrow{Oc_2}$: projection sur l'axe 2

Qualité

$$QUAL = Cos^2(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) = \frac{OP^2}{OM^2}$$

	QLT	Coord. 1	Cos2	Ctr	Coord. 2	Cos2	Ctr
AGRI	**0,889**	**1,35**	**0,884**	**22,89**	**-0,26**	**0,005**	**0,86**
SAAG	**0,913**	**1,41**	**0,898**	**24,97**	**-0,48**	**0,014**	**2,84**
PRIN	**0,576**	**-0,59**	**0,575**	**4,36**	**0,06**	**0,001**	**0,05**
CSUP	**0,943**	**-1,75**	**0,942**	**38,26**	**0,19**	**0,002**	**0,44**
CMOY	**0,940**	**-0,69**	**0,753**	**5,94**	**-0,91**	**0,187**	**10,43**
EMPL	**0,858**	**-0,32**	**0,428**	**1,31**	**-0,86**	**0,430**	**9,29**
OUVR	**0,376**	**0,36**	**0,361**	**1,63**	**-0,20**	**0,015**	**0,48**
INAC	**0,987**	**0,23**	**0,056**	**0,64**	**2,46**	**0,932**	**75,61**
				100			**100**

Contributions des individus

Analyse factorielle exploratoire

Cf. polycopié p. 27

Analyse factorielle (factor analysis ou FA). Origine : travaux de Pearson (1901).
Développée au départ par des psychologues.
Vers 1940 : fondements théoriques, au niveau statistique,

- nombreuses variantes :
parfois désignée par le terme "analyse en facteurs communs et spécifiques", selon les variantes :
"analyse factorielle exploratoire" (exploratory factor analysis ou EFA)
"analyse factorielle confirmatoire" (confirmatory factor analysis ou CFA).

L'analyse en facteurs principaux (principal factor analysis ou PFA) est l'une des variantes de l'analyse factorielle.

Exemple : 88 sujets – 5 matières

	Mechanics(C)	Vectors(C)	Algebra(O)	Analysis(O)	Statistics(O)
1	77	82	67	67	81
2	63	78	80	70	81
3	75	73	71	66	81
4	55	72	63	70	68
5	63	63	65	70	63
6	…	…	…	…	..

On cherche un modèle à deux facteurs, en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

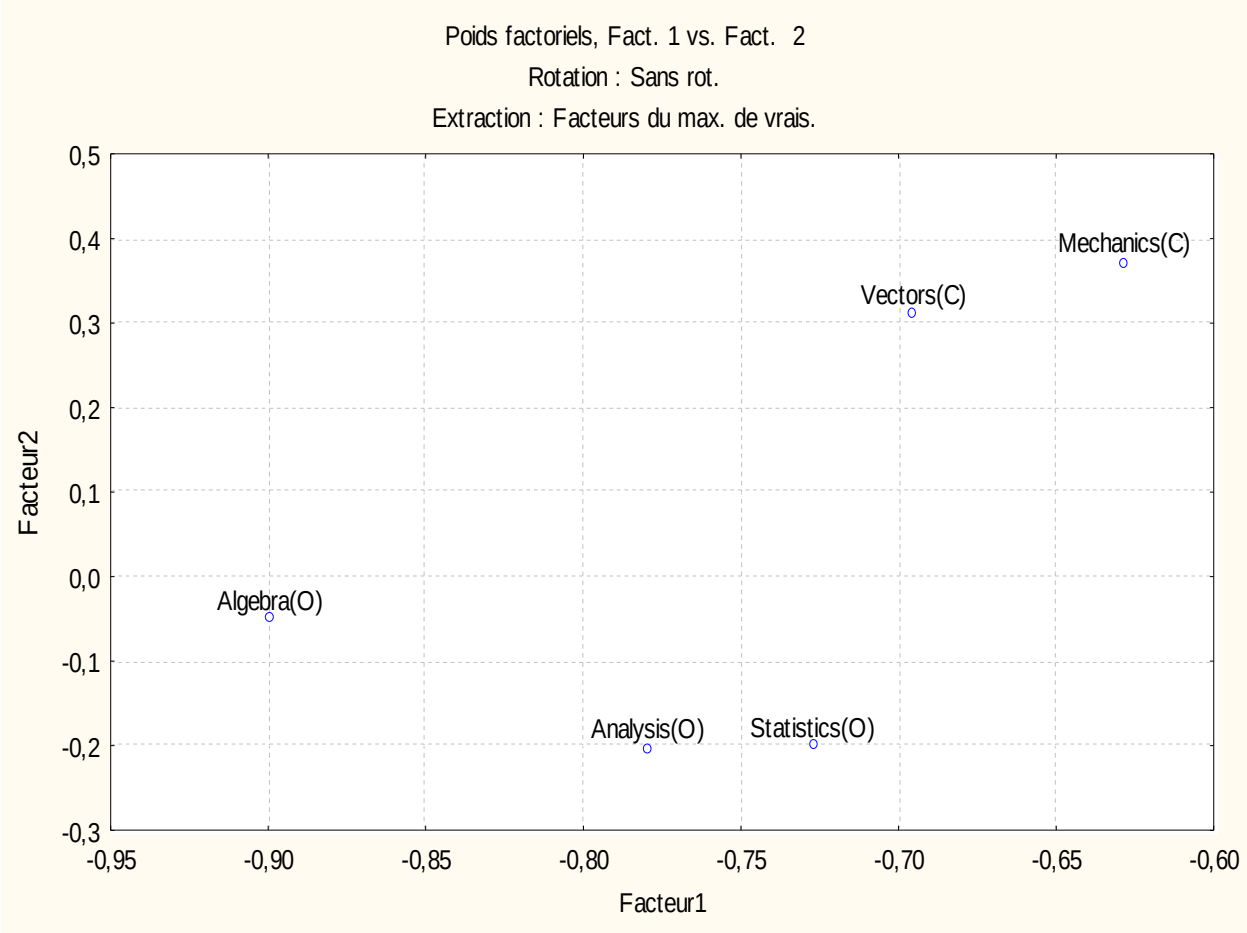
Val. Propres (Open/Closed Book Data)				
Extraction : Facteurs du max. de vrais.				
	Val Propre	% Total	Cumul	Cumul
		variance	Val propre	%
1	2,824170	56,48341	2,824170	56,48341
2	0,319491	6,38983	3,143662	62,87323

Communautés (Open/Closed Book) Rotation : Sans rot.			
	Pour 1	Pour 2	R-deux
	Facteur	Facteurs	Multiple
Mechanics(C)	0,394878	0,534103	0,376414
Vectors(C)	0,483548	0,580944	0,445122
Algebra(O)	0,808935	0,811431	0,671358
Analysis(O)	0,607779	0,648207	0,540864
Statistics(O)	0,529029	0,568977	0,479319

Qualité d'ajust.,2 (Open/Closed Book Data) (Test de la nullité des éléments en dehors de la diagonale dans la matrice de corr.)				
	% expl.	Chi²	dl	p
Résultat	62,87323	0,074710	1	0,784601

Corrélations des Résidus (Open/Closed Book Data) (Résidus marqués sont > ,100000)					
	Mechanics(C)	Vectors(C)	Algebra(O)	Analysis(O)	Statistics(O)
Mechanics(C)	0,47	-0,00	0,00	-0,01	0,01
Vectors(C)	-0,00	0,42	-0,00	0,01	-0,01
Algebra(O)	0,00	-0,00	0,19	-0,00	0,00
Analysis(O)	-0,01	0,01	-0,00	0,35	-0,00
Statistics(O)	0,01	-0,01	0,00	-0,00	0,43

Poids Factoriels(Sans rot.) (Open/Closed Book Data) (Poids marqués >,700000)		
	Facteur 1	Facteur 2
Mechanics(C)	-0,628393	0,373128
Vectors(C)	-0,695376	0,312083
Algebra(O)	-0,899408	-0,049958
Analysis(O)	-0,779602	-0,201066
Statistics(O)	-0,727344	-0,199869
Var. Expl.	2,824170	0,319491
Prp.Tot	0,564834	0,063898


Poids factoriels, Fact. 1 vs. Fact. 2
Rotation : Sans rot.
Extraction : Facteurs du max. de vrais.
Facteur2
Facteur1
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,95
-0,90
-0,85
-0,80
-0,75
-0,70
-0,65
-0,60
Mechanics(C)
Vectors(C)
Algebra(O)
Analysis(O)
Statistics(O)

- On a observé un ensemble X_1, X_2, ..., X_p de variables sur un échantillon
- On fait l'hypothèse que ces variables dépendent (linéairement) en partie de k variables non observables, ou variables latentes ou facteurs F_1, F_2, ..., F_k.

On cherche donc à décomposer les variables observées X_i (supposées centrées) de la façon suivante :

$$X_i = \sum_{r=1}^{k} l_{ir} F_r + E_i$$

$$\text{Variable observée} = \sum \text{coeff.} \times \text{variable latente} + \text{erreur spécifique}$$

avec les conditions suivantes :
- Le nombre k de facteurs est fixé à l'avance.
- Les facteurs F_r sont centrés réduits, non corrélés entre eux
- Les termes d'erreur E_i sont non corrélés avec les facteurs
- Les termes d'erreur E_i sont non corrélés entre eux.

Méthodes d’extraction des facteurs

Plusieurs méthodes (cf. Statistica). Par exemple :

- PCA (principal component analysis) : la méthode revient à faire une ACP, mais avec la possibilité d’effectuer une rotation des facteurs
- PFA (principal factor analysis) : on cherche à maximiser les communautés
- AF avec extraction par la méthode du maximum de vraisemblance (Maximum Likelihood extraction : MLE) : mais qu’est-ce que la vraisemblance ?

Notion de vraisemblance d'une valeur d'un paramètre :

Questions du type : "Etant donné des résultats observés sur un échantillon, est-il vraisemblable qu'un paramètre donné de la population ait telle valeur ?".

Exemple 1 : (variable discrète) Lors d'un référendum, on interroge trois personnes. Deux déclarent voter "oui", la troisième déclare voter "non".
Au vu de ces observations, laquelle de ces deux hypothèses est la plus vraisemblable :

- Le résultat du référendum sera 40% de "oui"
- Le résultat du référendum sera 60% de "oui".

Solution. Si le résultat du référendum est de 40% de "oui", la probabilité d'observer trois personnes votant respectivement "oui", "oui" et "non" est : P1 = 0,4x0,4x0,6 = 0,096. Si le résultat du référendum est de 60% de oui, la même probabilité est : P2 = 0,6x0,6x0,4 = 0,144. La seconde hypothèse est donc plus vraisemblable que la première.

Notion de vraisemblance d'une valeur d'un paramètre

Exemple 2 :

Lors d'un test effectué sur un échantillon de 5 sujets, on a observé les scores suivants :

90, 98, 103, 107, 112.

Deux modèles sont proposés pour représenter la distribution des scores dans la population parente :

- La loi normale de moyenne 100 et d'écart type 15
- La loi normale de moyenne 102 et d'écart type 10.

Quel est le modèle le plus vraisemblable ?

On utilise la valeur de la distribution de la loi théorique au lieu de la probabilité de la valeur observée. La vraisemblance associée à chaque hypothèse, calculée à l'aide d'Excel, est donc :

Obs	Modèle 1	Modèle 2
90	0,02130	0,01942
98	0,02636	0,03683
103	0,02607	0,03970
107	0,02385	0,03521
112	0,01931	0,02420
Vraisemblance	6,74E-09	2,42E-08

Le modèle 2, dont la vraisemblance est de $2{,}42\ 10^{-8}$ est plus vraisemblable que le modèle 1.

Estimation du maximum de vraisemblance

L'estimation du maximum de vraisemblance (EMV, maximum likelihood estimation ou MLE dans les ouvrages anglo-saxons) est la valeur du paramètre pour laquelle la vraisemblance est maximum -> valeur annulant une dérivée.

Les calculs de vraisemblance sont souvent multiplicatifs et conduisent à des nombres très proches de 0.

On utilise généralement la fonction L, opposée du logarithme de la vraisemblance. Dans le cas précédent du referendum on aurait ainsi :

$$L = - \ln P = - 2 \ln p - \ln(1 - p).$$

La recherche de l'estimation du maximum de vraisemblance revient alors à chercher le minimum de cette fonction.

Méthode du maximum de vraisemblance : test statistique d'adéquation du modèle.

On fixe a priori un nombre k de facteurs à extraire. Les poids factoriels des variables sur les différents facteurs sont alors déterminés de manière à optimiser une fonction de vraisemblance.

.

Test statistique permet évaluant la validité du résultat.

H_0 : Il y a exactement *k* facteurs communs.

H_1 : Plus de *k* facteurs sont nécessaires.

La statistique utilisée suit approximativement une loi du khi-2 avec

$$\tfrac{1}{2}\left[(p-k)^2-(p+k)\right]$$

degrés de liberté (p : nombre de variables, k : nombre de facteurs extraits).

Si le khi-2 trouvé excède la valeur critique correspondant au niveau de significativité choisi, H0 est rejetée, et il faut considérer au moins k+1 facteurs dans le modèle.

Rotation des facteurs :
rotations orthogonales, rotations obliques

Les facteurs extraits ne sont pas déterminés de manière unique

Toute rotation sur les facteurs produit une autre solution

Rechercher une solution qui "fasse sens", c'est-à-dire qui produise des facteurs plus simples à interpréter. Rotation varimax souvent utilisée.

La transformation par rotation n'affecte pas l'adéquation du modèle aux données. Les communautés, notamment, restent les mêmes.

Les solutions avant ou après rotation peuvent être interprétés de façon notablement différente.

	Poids Factoriels (sans rotation)		Poids Factoriels (après rotation varimax normalisé)	
	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 1	Facteur 2
Mechanics(C)	-0,628393	0,373128	0,270028	**0,679108**
Vectors(C)	-0,695376	0,312083	0,360346	**0,671636**
Algebra(O)	-0,899408	-0,049958	**0,742939**	**0,509384**
Analysis(O)	-0,779602	-0,201066	**0,740267**	0,316563
Statistics(O)	-0,727344	-0,199869	**0,698141**	0,285615
Var. Expl.	2,824170	0,319491	1,790119	1,353543
Prp.Tot	0,564834	0,063898	0,358024	0,270709

Aperçu sur l’analyse factorielle confirmatoire

Exemple d’analyse factorielle confirmatoire

Calsyn et Kenny (1971) ont étudié la relation entre les aptitudes perçues et les aspirations scolaires de 556 élèves du 8è grade. Les variables observées étaient les suivantes :

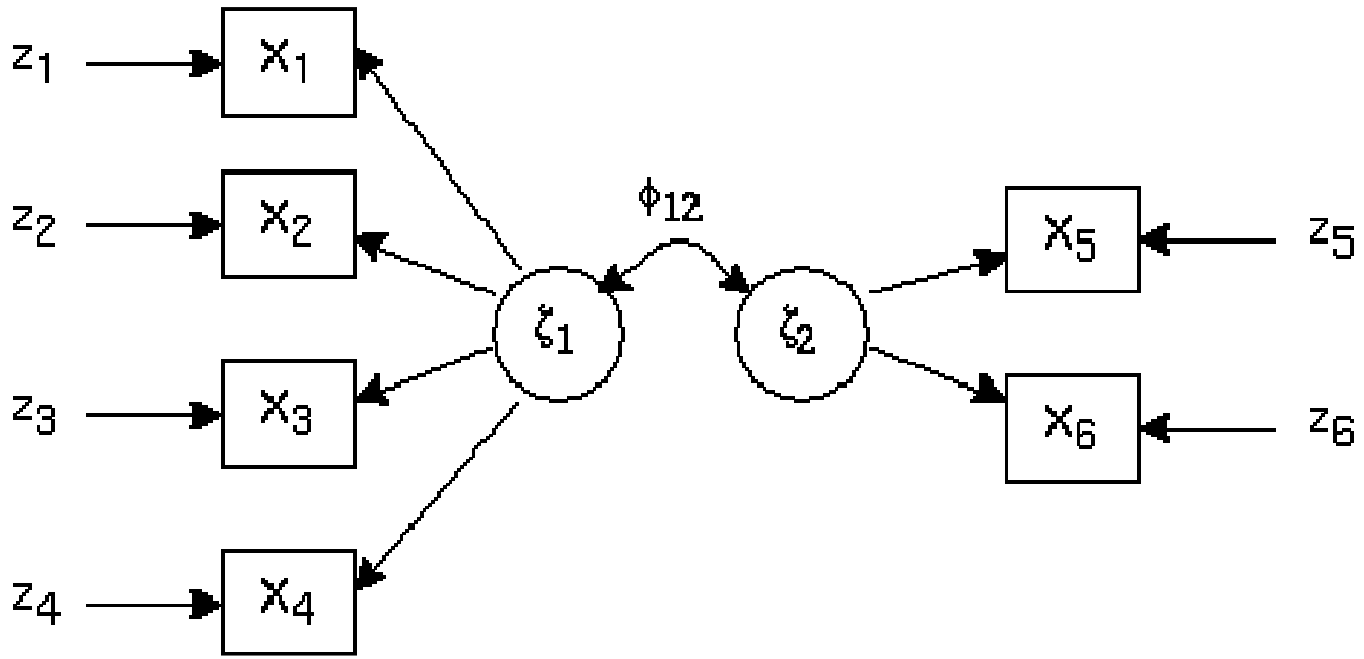
Self : auto-évaluation des aptitudes
Parent : évaluation par les parents
Teacher : évaluation par l'enseignant
Friend : évaluation par les amis
Educ Asp : aspirations scolaires
Col Plan : projets d'études supérieures

Corrélations entre les variables observées

	Feuille de données3					
	1 Self	2 Parent	3 Teacher	4 Friend	5 Educ Asp	6 Col Plan
Self	1,00	0,73	0,70	0,58	0,46	0,56
Parent	0,73	1,00	0,68	0,61	0,43	0,52
Teacher	0,70	0,68	1,00	0,57	0,40	0,48
Friend	0,58	0,61	0,57	1,00	0,37	0,41
Educ Asp	0,46	0,43	0,40	0,37	1,00	0,72
Col Plan	0,56	0,52	0,48	0,41	0,72	1,00
Moyennes	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
Ec-Types	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
Nb Obs.	556,00000					
Matrice	1,00000					

Le modèle à tester fait les hypothèses suivantes :
- Les 4 premières variables mesurent la variable latente "aptitudes"
- Les deux dernières mesurent la variable latente "aspirations".

Ce modèle est-il valide ? Et, s'il en est bien ainsi, les deux variables latentes sont-elles corrélées ?



Modèle Estimé (Ability and Aspiration dans AFC.stw)				
	Aptitudes	Aspirations	Communauté	Spécificité
Self	0,863		0,745	0,255
Parent	0,849		0,721	0,279
Teacher	0,805		0,648	0,352
Friend	0,695		0,483	0,517
Educ Asp		0,775	0,601	0,399
Col Plan		0,929	0,863	0,137

Statistiques de Synthèse (Ability and Aspiration dans AFC.stw)	
	Valeur
Chi-Deux MV	9,256
Degrés de Liberté	8,000
Niveau p	0,321

P=0,32 : bonne adéquation du modèle aux données

Analyse factorielle des correspondances

Cf. polycopié p. 50

Tableau de contingence : répartition d'étudiants en 1975-1976

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	80	99	65	58
Patron	168	137	208	62
Cadre sup.	470	400	876	79
Employé	145	133	135	54
Ouvrier	166	193	127	129

Cité par Saporta (1990)

Test du khi-2 sur un tableau de contingence

Modalités lignes : variable X
Modalités colonnes : variable Y

Hypothèses du test :
H_0 : Les variables X et Y sont indépendantes
H_1 : Les variables X et Y sont dépendantes

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	80	99	65	58
Patron	168	137	208	62
Cadre sup.	470	400	876	79
Employé	145	133	135	54
Ouvrier	166	193	127	129

Effectifs observés O

Construction de la statistique de test

	Droit	Sciences	Médecine	IUT	**Total**
Exp. agri.	80	99	65	58	**302**
Patron	168	137	208	62	**575**
Cadre sup.	470	400	876	79	**1825**
Employé	145	133	135	54	**467**
Ouvrier	166	193	127	129	**615**
Total	**1029**	**962**	**1411**	**382**	**3784**

Effectifs observés O_{ij}

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	82,12	76,78	112,61	30,49
Patron	156,36	146,18	214,41	58,05
Cadre sup.	496,28	463,97	680,52	184,24
Employé	126,99	118,72	174,14	47,14
Ouvrier	167,24	156,35	229,32	62,09

Effectifs théoriques T_{ij}

$$T_{ij} = \frac{\text{Total ligne i} \times \text{Total colonne j}}{\text{Total Général}}$$

$$\text{Exemple}: 82,12 = \frac{302 \times 1029}{3784}$$

Contributions au khi-2

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	0,05	6,43	20,13	24,83
Patron	0,87	0,58	0,19	0,27
Cadre sup.	1,39	8,82	56,15	60,11
Employé	2,55	1,72	8,80	1,00
Ouvrier	0,01	8,59	45,66	72,12

Contributions au khi-2 : $(O - T)^2/T$

$$\mathrm{Ctr}_{ij} = \frac{(O_{ij} - T_{ij})^2}{T_{ij}} \ ;$$

$$\text{Exemple}: 0,05 = \frac{(80 - 82,12)^2}{82,12}$$

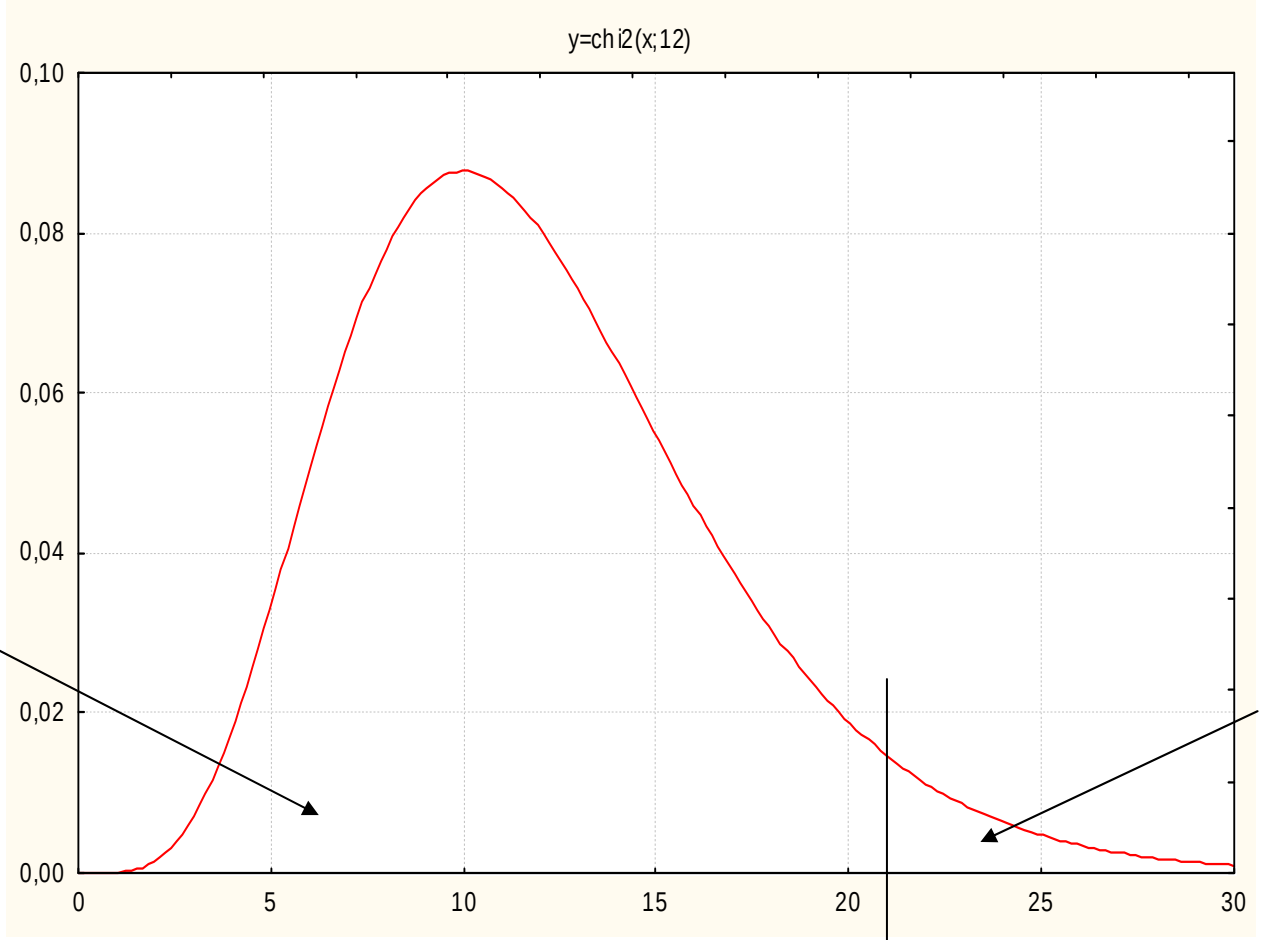
Calcul du khi-2

$$\chi^2_{Obs} = \sum_{i,j} \mathrm{Ctr}_{ij} = 0,05 + \ldots + 72,12 = 320,2$$

Nombre de degrés de liberté :

$$\mathrm{ddl} = (\text{Nb Modalités lignes} - 1)(\text{Nb Modalités colonnes} - 1) = 12$$

Loi du khi-2



95%

5%

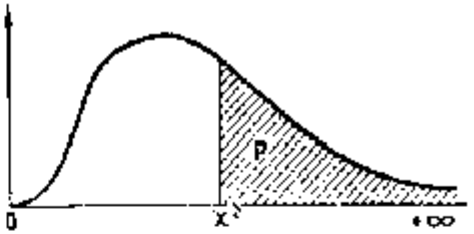
H_0 retenue

H_0 rejetée ; H_1 retenue

$\chi^2_{Crit} = 21{,}03$

DISTRIBUTION DE χ^2 (Loi de K. Pearson)

Valeur de χ^2 ayant la probabilité *P* dêtre dépassée.



v	0,9	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	0.0158	0.0642	0.148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0.211	0.446	0.713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0.584	1.005	1.424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,041	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,471	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578

$\chi^2_{Obs} > \chi^2_{Crit}$: on conclut donc sur H_1

Les deux variables étudiées dépendent l'une de l'autre

Effectifs et fréquences marginaux

	Droit	Sciences	Médecine	IUT	Effectifs marginaux lignes	Fréquence
Exp. agri.	80	99	65	58	302	0,0798
Patron	168	137	208	62	575	0,1520
Cadre sup.	470	400	876	79	1825	0,4823
Employé	145	133	135	54	467	0,1234
Ouvrier	166	193	127	129	615	0,1625
Effectifs marginaux colonnes	1029	962	1411	382	3784	
Fréquence	0,2719	0,2542	0,3729	0,1010		

Fréquences théoriques dans l'hypothèse d'indépendance

X	0,2719	0,2542	0,3729	0,1010
0,0798				
0,1520				
0,4823				
0,1234				
0,1625				

=				
	0,0217	0,0203	0,0298	0,0081
	0,0413	0,0386	0,0567	0,0153
	0,1312	0,1226	0,1798	0,0487
	0,0336	0,0314	0,0460	0,0125
	0,0442	0,0413	0,0606	0,0164

$$\begin{bmatrix} 0,0798 \\ 0,1520 \\ 0,4823 \\ 0,1234 \\ 0,1625 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,2719 & 0,2542 & 0,3729 & 0,1010 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0217 & 0,0203 & 0,0298 & 0,081 \\ 0,0413 & 0,0386 & 0,0567 & 0,0153 \\ 0,1312 & 0,1226 & 0,1798 & 0,0487 \\ 0,0336 & 0,0314 & 0,0460 & 0,0125 \\ 0,0442 & 0,0413 & 0,0606 & 0,0164 \end{bmatrix}$$

Effectifs théoriques dans le cas d'indépendance

0,0217	0,0203	0,0298	0,0081		82,12	76,78	112,61	30,49
0,0413	0,0386	0,0567	0,0153		156,36	146,18	214,41	58,05
0,1312	0,1226	0,1798	0,0487		496,28	463,97	680,52	184,24
0,0336	0,0314	0,0460	0,0125		126,99	118,72	174,14	47,14
0,0442	0,0413	0,0606	0,0164	x 3784 =	167,24	156,35	229,32	62,09

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	80	99	65	58
Patron	168	137	208	62
Cadre sup.	470	400	876	79
Employé	145	133	135	54
Ouvrier	166	193	127	129

Effectifs observés O

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	82,12	76,78	112,61	30,49
Patron	156,36	146,18	214,41	58,05
Cadre sup.	496,28	463,97	680,52	184,24
Employé	126,99	118,72	174,14	47,14
Ouvrier	167,24	156,35	229,32	62,09

Effectifs théoriques T

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	-2,12	22,22	-47,61	27,51
Patron	11,64	-9,18	-6,41	3,95
Cadre sup.	-26,28	-63,97	195,48	-105,24
Employé	18,01	14,28	-39,14	6,86
Ouvrier	-1,24	36,65	-102,32	66,91

Ecarts à l'indépendance : E = O - T

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	82,12	76,78	112,61	30,49
Patron	156,36	146,18	214,41	58,05
Cadre sup.	496,28	463,97	680,52	184,24
Employé	126,99	118,72	174,14	47,14
Ouvrier	167,24	156,35	229,32	62,09

Effectifs théoriques T

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	-2,12	22,22	-47,61	27,51
Patron	11,64	-9,18	-6,41	3,95
Cadre sup.	-26,28	-63,97	195,48	-105,24
Employé	18,01	14,28	-39,14	6,86
Ouvrier	-1,24	36,65	-102,32	66,91

Ecarts à l'indépendance : E = O - T

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	-0,03	0,29	-0,42	0,90
Patron	0,07	-0,06	-0,03	0,07
Cadre sup.	-0,05	-0,14	0,29	-0,57
Employé	0,14	0,12	-0,22	0,15
Ouvrier	-0,01	0,23	-0,45	1,08

Taux de liaison : (O - T)/T : valeurs dans l'intervalle [-1, +∞ [

-0,42 : l'effectif observé est inférieur de 42% à l'effectif théorique

1,08 : l'effectif observé est supérieur de 108% à l'effectif théorique

Analyse des correspondances

Les questions auxquelles on cherche à répondre :

- Quelles sont les modalités lignes qui sont « proches » du profil ligne moyen ? Quelles sont celles qui s'en écartent le plus ?

- Quelles sont les modalités colonnes qui sont « proches » du profil colonne moyen ? Quelles sont celles qui s'en écartent le plus ?

- Quelles sont les modalités lignes et les modalités colonnes qui « s'attirent » ? Quelles sont celles qui « se repoussent » ?

Notations :

Soit un tableau de contingence comportant p lignes et q colonnes.

- L'élément du tableau situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est noté n_{ij}.

- La somme des éléments d'une ligne est notée $n_{i\bullet}$

- La somme des éléments d'une colonne est notée $n_{\bullet j}$

Distance (du Phi-2) entre deux profils lignes :

$$d^2_{ii'} = \sum_{j=1}^{q} \frac{n}{n_{\bullet j}} \left(\frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} - \frac{n_{i'j}}{n_{i'\bullet}} \right)^2$$

Exemple :

	Droit	Sciences	Médecine	IUT	Effectifs marginaux lignes
Exp. agri.	80	99	65	58	302
Patron	168	137	208	62	575
Cadre sup.	470	400	876	79	1825
Employé	145	133	135	54	467
Ouvrier	166	193	127	129	615
Effectifs marginaux colonnes	1029	962	1411	382	3784

$$d^2_{12} = \frac{3784}{1029}\left(\frac{80}{302} - \frac{168}{575} \right)^2 + \frac{3784}{962}\left(\frac{99}{302} - \frac{137}{575} \right)^2 + \frac{3784}{1411}\left(\frac{65}{302} - \frac{208}{575} \right)^2 + \frac{3784}{382}\left(\frac{58}{302} - \frac{62}{575} \right)^2$$

Distance (du Phi-2) entre deux profils colonnes :

$$d^2_{jj'} = \sum_{i=1}^{p} \frac{n}{n_{i\bullet}} \left(\frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} - \frac{n_{ij'}}{n_{\bullet j'}} \right)^2$$

Exemple : distance entre les colonnes 1 et 2

	Droit	Sciences	Médecine	IUT	Effectifs marginaux lignes
Exp. agri.	80	99	65	58	302
Patron	168	137	208	62	575
Cadre sup.	470	400	876	79	1825
Employé	145	133	135	54	467
Ouvrier	166	193	127	129	615
Effectifs marginaux colonnes	1029	962	1411	382	3784

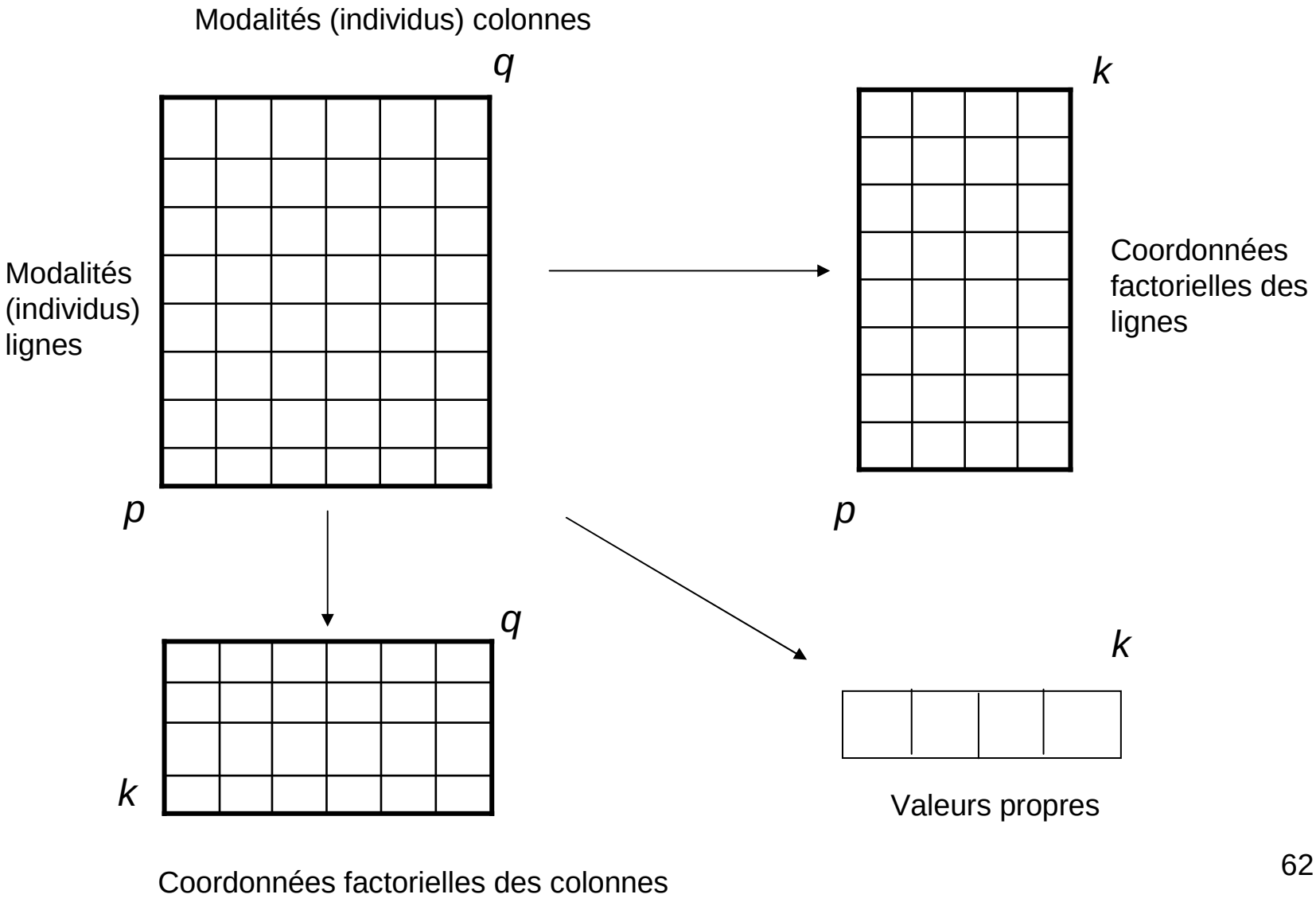
$$d^2_{12} = \frac{3784}{302}\left(\frac{80}{1029} - \frac{99}{962}\right)^2 + \frac{3784}{575}\left(\frac{168}{1029} - \frac{137}{962}\right)^2 + \frac{3784}{1825}\left(\frac{470}{1029} - \frac{400}{962}\right)^2 + \frac{3784}{467}\left(\frac{145}{1029} - \frac{133}{962}\right)^2 + \frac{3784}{615}\left(\frac{166}{1029} - \frac{193}{962}\right)^2$$

Propriété d'équivalence distributionnelle :

- Si on regroupe deux modalités lignes, les distances entre les profils-colonnes, ou entre les autres profils-lignes restent inchangées.

- Si on regroupe deux modalités colonnes, les distances entre les profils-lignes, ou entre les autres profils-colonnes restent inchangées.

Principaux résultats d'une AFC



Valeurs propres

	ValProp.	%age inertie	%age cumulé	Chi²
1	0,082	97,35	97,35	311,78
2	0,002	2,01	99,36	6,45
3	0,001	0,64	100,00	2,04

Inertie totale du nuage de points :

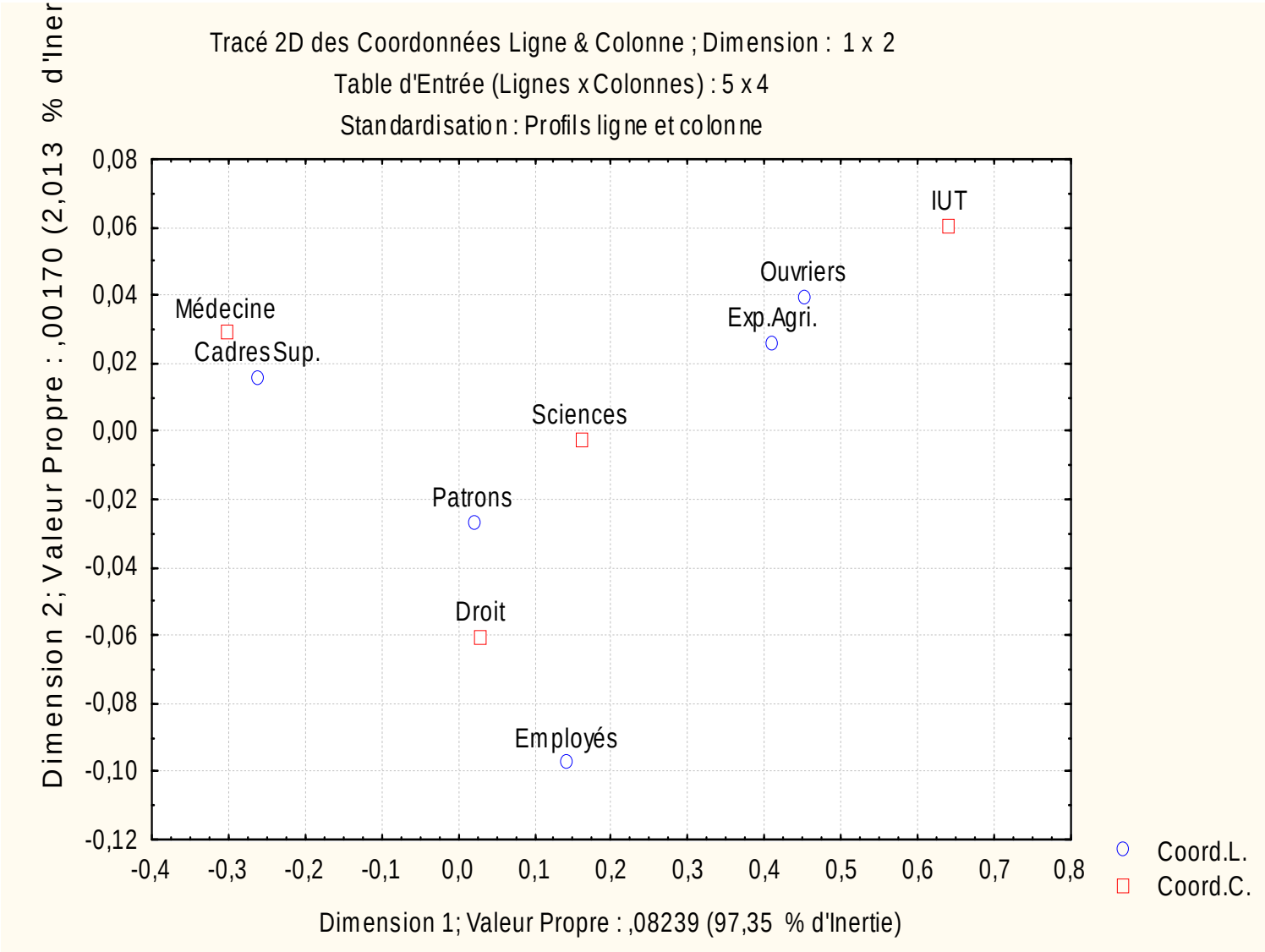
$$\Phi^2 = \frac{\chi^2}{N} = \sum \text{Valeurs Propres} = \sum GM_i^2$$

Résultats relatifs aux lignes

	Coord. Dim.1	Coord. Dim.2	Masse	Qualité	Inertie Relative	Inertie Dim.1	Cosinus² Dim.1	Inertie Dim.2	Cosinus² Dim.2
Exp. Agri.	0,410	0,026	0,080	0,991	0,161	0,163	0,987	0,032	0,004
Patrons	0,020	-0,027	0,152	0,336	0,006	0,001	0,123	0,063	0,213
Cadres Sup.	-0,263	0,016	0,482	0,999	0,395	0,404	0,996	0,069	0,004
Employés	0,142	-0,097	0,123	0,985	0,044	0,030	0,670	0,686	0,315
Ouvriers	0,451	0,040	0,163	1,000	0,395	0,402	0,992	0,150	0,008

Résultats relatifs aux colonnes

	Coord. Dim.1	Coord. Dim.2	Masse	Qualité	Inertie Relative	Inertie Dim.1	Cosinus² Dim.1	Inertie Dim.2	Cosinus² Dim.2
Droit	0,028	-0,061	0,272	0,942	0,015	0,003	0,165	0,588	0,777
Sciences	0,160	-0,003	0,254	0,948	0,082	0,079	0,948	0,001	0,000
Médecine	-0,303	0,030	0,373	1,000	0,409	0,416	0,990	0,193	0,009
IUT	0,640	0,061	0,101	0,998	0,494	0,502	0,989	0,219	0,009


Tracé 2D des Coordonnées Ligne & Colonne ; Dimension : 1 x 2
Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 5 x 4
Standardisation : Profils ligne et colonne
Dimension 2; Valeur Propre : ,00170 (2,013 % d'Iner
Dimension 1; Valeur Propre : ,08239 (97,35 % d'Inertie)
0,08
0,06
0,04
0,02
0,00
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,10
-0,12
-0,4
-0,3
-0,2
-0,1
0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
IUT
Ouvriers
Exp.Agri.
Médecine
Cadres Sup.
Sciences
Patrons
Droit
Employés
Coord.L.
Coord.C.

Analyse des correspondances multiples

Cf. polycopié p. 78

Tableau protocole : 3 questions, 7 modalités

	Sexe	Revenu	Preference
s1	F	M	A
s2	F	M	A
s3	F	E	B
s4	F	E	C
s5	F	E	C
s6	H	E	C
s7	H	E	B
s8	H	M	B
s9	H	M	B
s10	H	M	A

Tableau disjonctif complet

	Sexe: F	Sexe: H	Rev: M	Rev:E	Pref:A	Pref:B	Pref:C
s1	1	0	1	0	1	0	0
s2	1	0	1	0	1	0	0
s3	1	0	0	1	0	1	0
s4	1	0	0	1	0	0	1
s5	1	0	0	1	0	0	1
s6	0	1	0	1	0	0	1
s7	0	1	0	1	0	1	0
s8	0	1	1	0	0	1	0
s9	0	1	1	0	0	1	0
s10	0	1	1	0	1	0	0

La disjonction complète

DEPARTEMENTS	BLE	VIN	LAIT
DEP 1	NON	ROUGE	PEU
DEP 2	OUI	ROSE	MOYEN
DEP 3	OUI	BLANC	MOYEN

LA DISJONCTION EST UNE CODIFICATION EN DONNEES BINAIRES

CREATION D'UNE VARIABLE POUR CHAQUE MODALITE

	BLE		VIN			LAIT		
DEPARTEMENTS	OUI	NON	ROUGE	ROSE	BLANC	PEU	MOYEN	BCP
DEP 1	0	1	1	0	0	1	0	0
DEP 2	1	0	0	1	0	0	1	0
DEP 3	1	0	0	0	1	0	1	0

Tableau d’effectifs ou tableau des patrons de réponses

Sexe	Revenu	Preference	Effectif
F	M	A	2
F	E	B	1
F	E	C	2
H	E	C	1
H	E	B	1
H	M	B	2
H	M	A	1

Tableau disjonctif des patrons de réponses

	Sexe: F	Sexe: H	Rev: M	Rev:E	Pref:A	Pref:B	Pref:C
FMA	2	0	2	0	2	0	0
FEB	1	0	0	1	0	1	0
FEC	2	0	0	2	0	0	2
HEC	0	1	0	1	0	0	1
HEB	0	1	0	1	0	1	0
HMB	0	2	2	0	0	2	0
HMA	0	1	1	0	1	0	0

Tableau de Burt

	F	H	M	E	A	B	C
Sexe:F	5	0	2	3	2	1	2
Sexe:H	0	5	3	2	1	3	1
Revenu:M	2	3	5	0	3	2	0
Revenu:E	3	2	0	5	0	2	3
Preference:A	2	1	3	0	3	0	0
Preference:B	1	3	2	2	0	4	0
Preference:C	2	1	0	3	0	0	3

Le tableau de BURT

Si **X** est une matrice disjonctive complète
La Matrice de BURT est $^{t}\mathbf{XX}$

	$^{t}\mathbf{X}$			**X**							
				BLE		*VIN*			*LAIT*		
				OUI	*NON*	*Rouge*	*Rosé*	*Blanc*	*Peu*	*Moyen*	*Bcp*
				0	***1***	***1***	***0***	***0***	***1***	***0***	***0***
				1	***0***	***0***	***1***	***0***	***0***	***1***	***0***
				1	***0***	***0***	***0***	***1***	***0***	***1***	***0***
OUI	***0***	***1***	***1***	2	0	0	1	1	0	2	0
NON	***1***	***0***	***0***	0	1	1	0	0	1	0	0
Rouge	***1***	***0***	***0***	0	1	1	0	0	1	0	0
Rosé	***0***	***1***	***0***	1	0	0	1	0	0	1	0
Blanc	***0***	***0***	***1***	1	0	0	0	1	0	1	0
Pau	***1***	***0***	***0***	0	1	1	0	0	1	0	0
Moyen	***0***	***1***	***1***	2	0	0	1	1	0	2	0
Bcp	***0***	***0***	***0***	0	0	0	0	0	0	0	0

$^{t}\mathbf{XX}$

MATRICE DE BURT

Tous les tris simples
Tous les tris croisés

Propriété de l’analyse des correspondances (simple)

Lorsqu’il y a deux variables qualitatives réunies dans un tableau disjonctif $X = [X_1|X_2]$, l’analyse factorielle des correspondances du tableau disjonctif est équivalente à l’analyse des correspondances du tableau de contingence $N = {}^{T}X_1 \; X_2$

Analyse des correspondances multiples

Effectuer l'analyse des correspondances multiples, c'est effectuer l'analyse factorielle des correspondances du tableau disjonctif complet, muni des relations K<Q> (modalités emboîtées dans les questions) et I<K<q>> (individus emboîtés dans les modalités de chaque question).

[Rouanet et Le Roux]

Résultats produits par l’ACM sur le tableau suivant :

	Sexe	Revenu	Preference
s1	F	M	A
s2	F	M	A
s3	F	E	B
s4	F	E	C
s5	F	E	C
s6	H	E	C
s7	H	E	B
s8	H	M	B
s9	H	M	B
s10	H	M	A

Valeurs propres

Valeurs Propres et Inertie de toutes les Dimensions (Protocole dans Mini-ACM.stw) Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 7 x 7 (Table de Burt) Inertie Totale = 1,3333

	ValSing.	**ValProp.**	**%age**	**%age**	**Chi²**
1	0,776426	0,602837	45,21275	45,2128	25,37943
2	0,680961	0,463708	34,77810	79,9909	19,52211
3	0,450509	0,202959	15,22190	95,2128	8,54456
4	0,252646	0,063830	4,78725	100,0000	2,68724

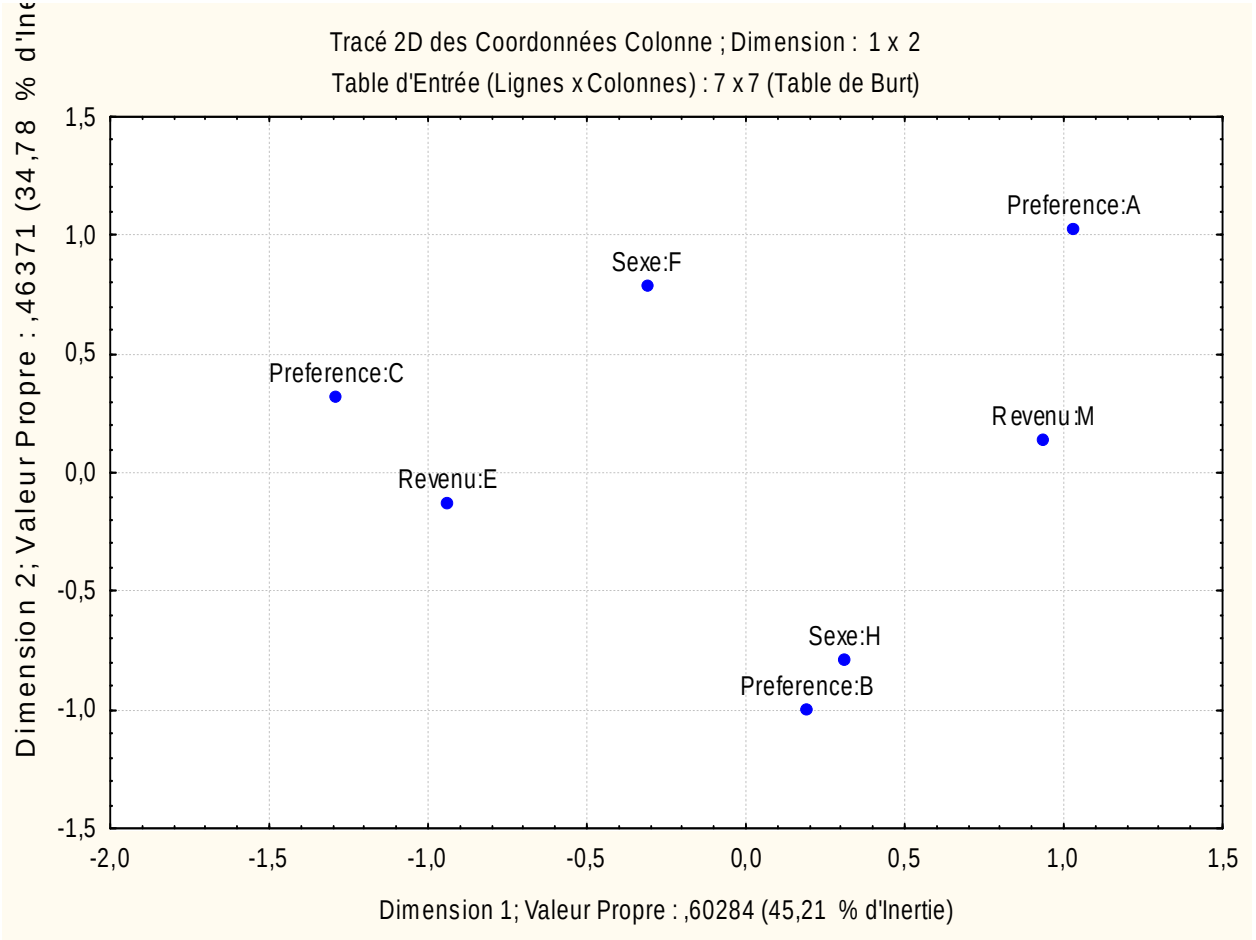
Valeurs propres : décroissance lente -> taux d’inertie modifiés de Benzécri

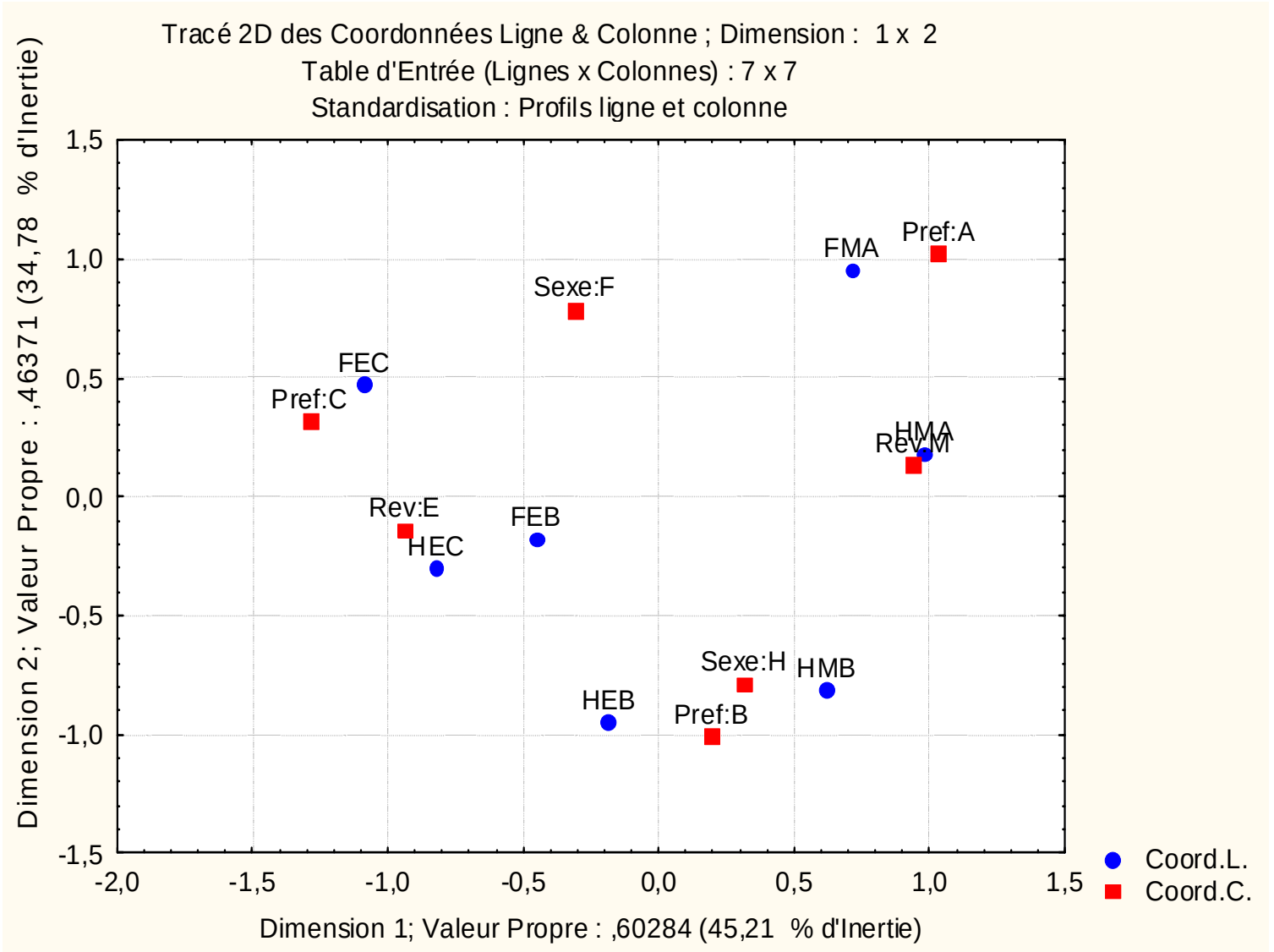
Calcul des taux modifiés :

	ValProp.	1/Q	(VP-1/Q)^2	%age
1	0,6028	0,3333	0,0726	81,04%
2	0,4637	0,3333	0,0170	18,96%
3	0,2030			
4	0,0638			
Somme	**1,3333**		**0,089630**	

Coordonnées, inertie et cosinus carrés

NomLigne	Coordonnées Colonne et Contributions à l'Inertie (Protocole dans Mini-ACM.stw) Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 7 x 7 (Table de Burt) Inertie Totale = 1,3333									
	Ligne Numéro	Coord. Dim.1	Coord. Dim.2	Masse	Qualité	Inertie Relative	Inertie Dim.1	Cosinus² Dim.1	Inertie Dim.2	Cosinus² Dim.2
Sexe:F	1	-0,31	0,79	0,17	0,72	0,12	0,03	0,10	0,22	0,62
Sexe:H	2	0,31	-0,79	0,17	0,72	0,12	0,03	0,10	0,22	0,62
Revenu:M	3	0,94	0,14	0,17	0,90	0,13	0,24	0,88	0,01	0,02
Revenu:E	4	-0,94	-0,14	0,17	0,90	0,13	0,24	0,88	0,01	0,02
Preference:A	5	1,03	1,02	0,10	0,91	0,18	0,18	0,46	0,23	0,45
Preference:B	6	0,19	-1,01	0,13	0,70	0,15	0,01	0,02	0,29	0,68
Preference:C	7	-1,29	0,32	0,10	0,75	0,18	0,28	0,71	0,02	0,04


Tracé 2D des Coordonnées Colonne ; Dimension : 1 x 2
Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 7 x 7 (Table de Burt)
Dimension 2; Valeur Propre : ,46371 (34,78 % d'Ine
Dimension 1; Valeur Propre : ,60284 (45,21 % d'Inertie)
1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
-1,5
-2,0
-1,5
-1,0
-0,5
0,0
0,5
1,0
1,5
Preference:A
Sexe:F
Preference:C
Revenu:M
Revenu:E
Sexe:H
Preference:B


Tracé 2D des Coordonnées Ligne & Colonne ; Dimension : 1 x 2
Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 7 x 7
Standardisation : Profils ligne et colonne
Dimension 2; Valeur Propre : ,46371 (34,78 % d'Inertie)
Dimension 1; Valeur Propre : ,60284 (45,21 % d'Inertie)
1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
-1,5
-2,0
-1,5
-1,0
-0,5
0,0
0,5
1,0
1,5
FMA
Pref:A
Sexe:F
FEC
Pref:C
HMA
Rev:M
Rev:E
FEB
HEC
Sexe:H
HMB
HEB
Pref:B
Coord.L.
Coord.C.

Propriétés algébriques et géométriques de l'ACM

Valeur du Phi-2 :

$$\Phi^2 = \frac{K-Q}{Q} = \frac{Nombre\ \ de\ \ modalités\ -\ \ Nombre\ \ de\ \ questions}{Nombre\ \ de\ \ questions}$$

Sur notre exemple :

$$\Phi^2 = \frac{7-3}{3} = 1{,}33$$

Contributions absolues et relatives des modalités colonnes à l'inertie :

$$Cta(M_k) = \frac{1 - f_k}{Q} \qquad Ctr(M_k) = \frac{1 - f_k}{K - Q}$$

Sur notre exemple :

$$Ctr([\text{Sexe} : \text{F}]) = \frac{1 - 0{,}5}{4} = 12{,}5\%$$

$$Ctr([\text{Pref} : \text{A}]) = \frac{1 - 0{,}3}{4} = 17{,}5\%$$

Contribution d'autant plus forte que la modalité est plus rare

Inerties absolue et relative d'une question :

$$I(X_q) = \frac{K_q - 1}{Q}$$

K_q : nombre de modalités de la question q

$$Inr(X_q) = \frac{K_q - 1}{K - Q} = \frac{\text{Nb de modalités de la question} - 1}{\text{Nb total de modalités - Nb de questions}}$$

Sur l'exemple :

Inerties absolue et relative d'une question :

$$I(\text{Sexe}) = I(\text{Revenu}) = \frac{2-1}{3} = 0{,}33$$

$$I(\text{Pref}) = \frac{3-1}{3} = 0{,}67$$

$$Inr(\text{Sexe}) = Inr(\text{Revenu}) = \frac{2-1}{4} = 25\%$$

$$I(\text{Pref}) = \frac{3-1}{4} = 50\%$$

L'inertie d'une question est d'autant plus forte que la question comporte un plus grand nombre de modalités.

Distances entre profils lignes :

$$d^2_{\Phi^2}(Patron\ \ i, Patron\ \ i') = \frac{1}{Nb\ \ de\ \ Questions} \sum \frac{1}{fréquence\ \ de\ \ la\ \ modalité\ \ k}$$

Somme étendue à toutes les modalités faisant partie de l'un des deux patrons, sans faire partie des deux patrons

Exemple :

$$d^2_{\Phi^2}([\text{FMA}],[\text{HMA}]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{0{,}5}\right) = 1{,}33$$

Deux patrons sont d'autant plus éloignés qu'ils diffèrent sur un plus grand nombre de modalités et que celles-ci sont plus rares.

Distance d'une ligne au profil moyen

$$d^2_{\Phi^2}(O,\ Patron\ \ i) = \left(\frac{1}{Nombre\ \ de\ \ Questions} \sum \frac{1}{fréquence\ \ de\ \ la\ \ modalité\ \ k} \right) - 1$$

Somme étendue à toutes les modalités faisant partie du patron i

Exemple :

$$d^2_{\Phi^2}(O,[FMA]) = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{0{,}3} \right) \right) - 1 = 1{,}44$$

Un patron est d'autant plus loin de l'origine qu'il comporte des modalités rares

Distances entre profils colonnes :

$$d^2_{\Phi^2}(M_k,\ M_{k'}) = \frac{1}{f_k} + \frac{1}{f_{k'}} - 2\frac{f_{kk'}}{f_k f_{k'}} = \frac{n_k + n_{k'} - 2n_{kk'}}{n_k n_{k'}/n}$$

$$d^2_{\Phi^2}(M_k,\ M_{k'}) = \frac{Effectif\ \ de\ \ k + Effectif\ \ de\ \ k' - 2 \times Effectif\ \ de\ \ la\ \ combinaison\ \ k\ \&\ k'}{Effectif\ \ de\ \ k \times\ Effectif\ \ de\ \ k'\ /\ Effectif\ \ total}$$

Exemple :

$$d^2_{\Phi^2}(\text{Sexe} : \text{F}, \text{Revenu} : \text{M}) = \frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{0{,}5} - 2\frac{0{,}2}{0{,}5 \times 0{,}5} = \frac{5+5-2\times 2}{5\times 5/10} = 2{,}4$$

Deux modalités sont d'autant plus éloignées qu'elles sont de fréquences faibles et rarement rencontrées simultanément

Distance d'une colonne au profil moyen :

$$d^2_{\Phi^2}(O,\ M_k) = \frac{1}{f_k} - 1 = \frac{n}{n_k} - 1 = \frac{Effectif\ \ total}{Effectif\ \ de\ \ k} - 1$$

Exemple :

$$d^2_{\Phi^2}(O, \text{Pref} : \text{B}) = \frac{1}{0{,}4} - 1 = \frac{10}{4} - 1 = 1{,}5$$

Une modalité est d'autant plus loin de O que sa fréquence est faible

1) Indépendance des modalités M_k et $M_{k'}$:

$$d^2(M_k, M_{k'}) = d^2(O, M_k) + d^2(O, M_{k'})$$

Autrement dit, dans l'espace multidimensionnel, le triangle $OM_kM_{k'}$ est alors un triangle rectangle en O.

2) Si les modalités M_k et $M_{k'}$ s'attirent, l'angle $(OM_k, OM_{k'})$

est un angle aigu.

3) Si les modalités M_k et $M_{k'}$ se repoussent, l'angle $(OM_k, OM_{k'})$

est un angle obtus.

4) Si l'effectif conjoint $n_{kk'}$ des modalités M_k et $M_{k'}$ est nul (en particulier si M_k et $M_{k'}$ sont deux modalités d'une même question) :

$$d^2(M_k, M_{k'}) = d^2(O, M_k) + d^2(O, M_{k'}) + 2$$

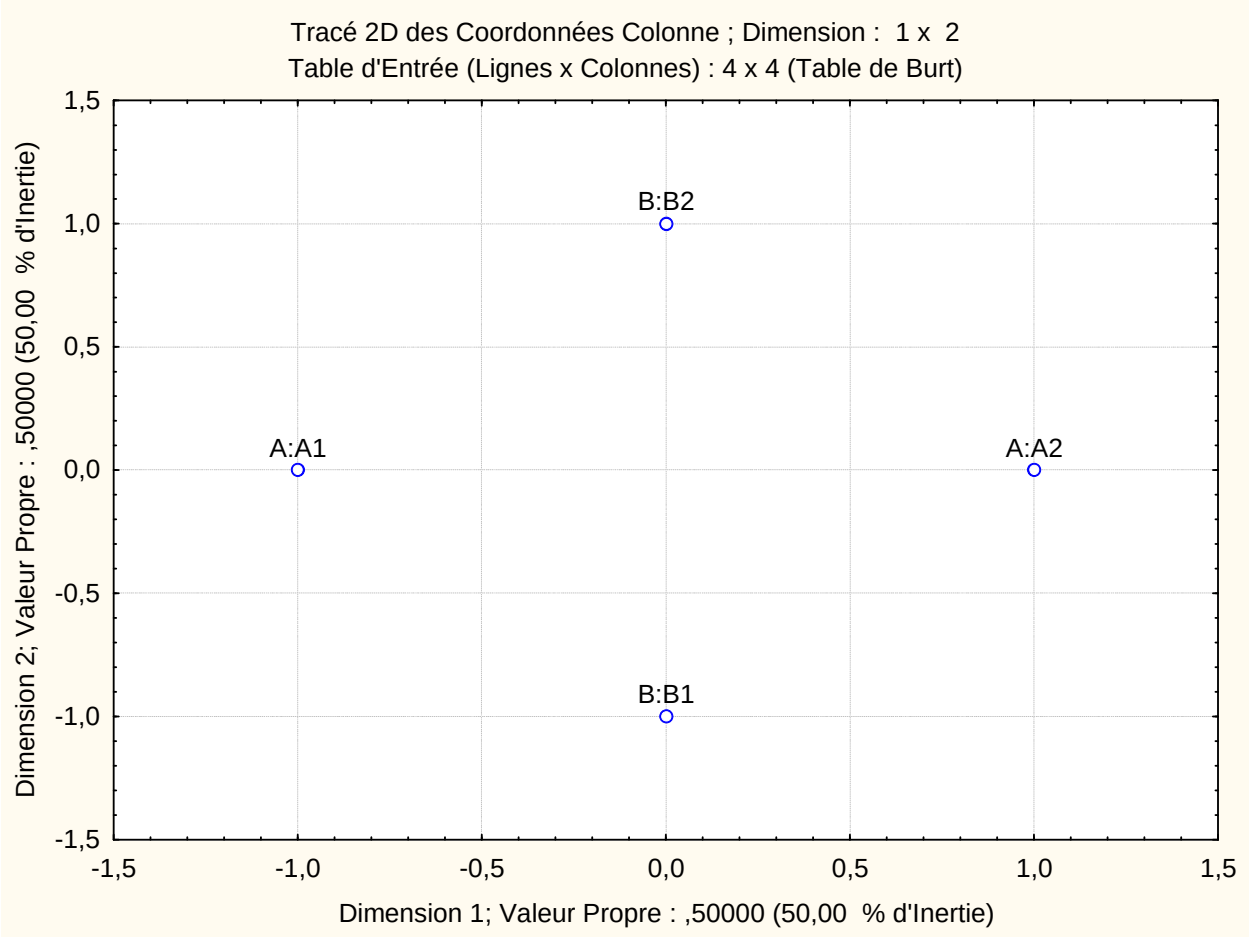
Deux questions à deux modalités chacune.

Cas 1 : les effectifs des modalités sont donnés par :

	A1	A2	Total
B1	50	50	100
B2	50	50	100
Total	100	100	200

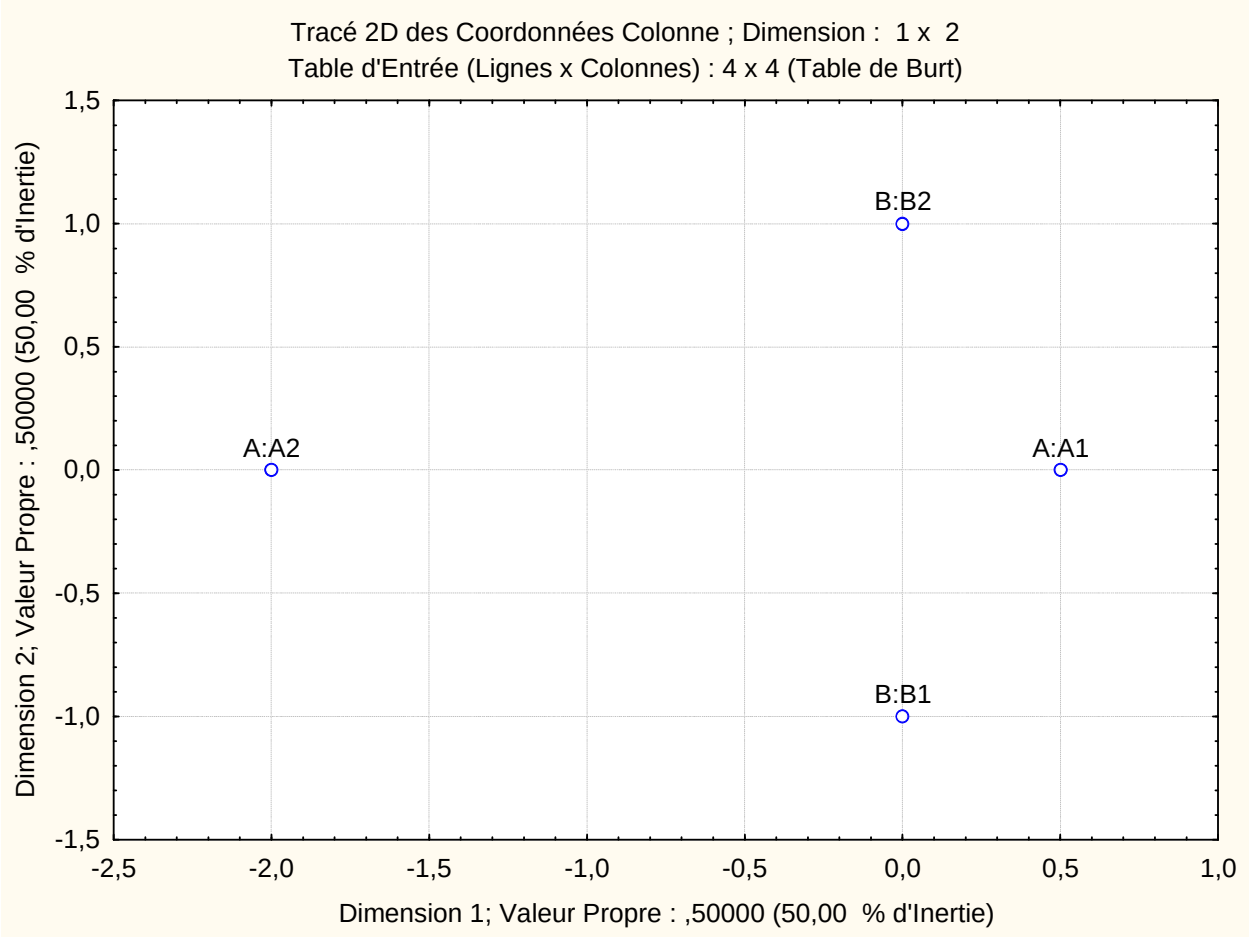
Prévoir la forme de la représentation par rapport au premier plan factoriel.

Réponse :


Tracé 2D des Coordonnées Colonne ; Dimension : 1 x 2
Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 4 x 4 (Table de Burt)
Dimension 2; Valeur Propre : ,50000 (50,00 % d'Inertie)
Dimension 1; Valeur Propre : ,50000 (50,00 % d'Inertie)
1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
-1,5
B:B2
A:A1
A:A2
B:B1

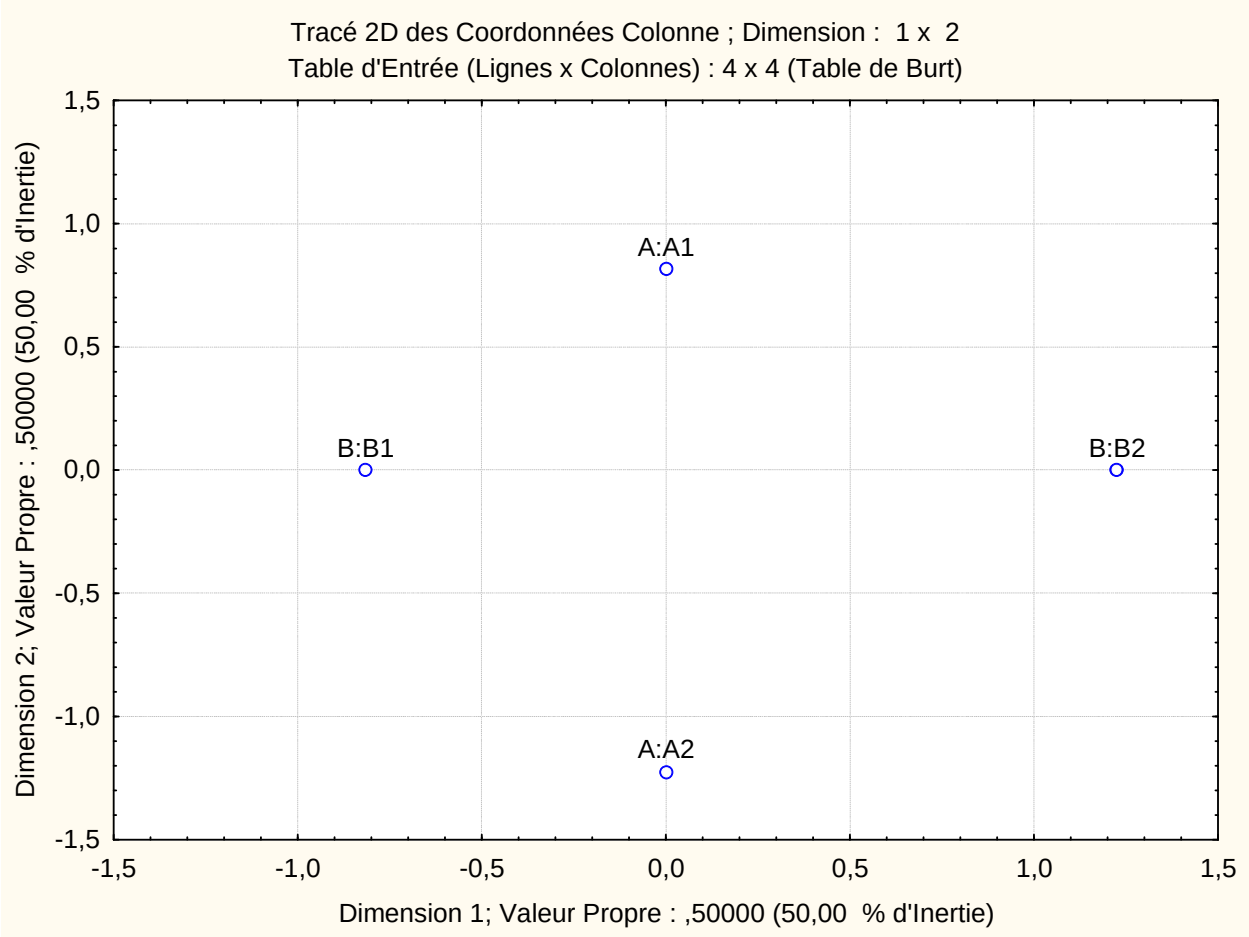
Cas 2 : les effectifs des modalités sont donnés par :

	A1	A2	Total
B1	80	20	100
B2	80	20	100
Total	160	40	200


Tracé 2D des Coordonnées Colonne ; Dimension : 1 x 2
Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 4 x 4 (Table de Burt)
Dimension 2; Valeur Propre : ,50000 (50,00 % d'Inertie)
Dimension 1; Valeur Propre : ,50000 (50,00 % d'Inertie)
1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
-1,5
-2,5
-2,0
-1,5
-1,0
-0,5
0,0
0,5
1,0
B:B2
A:A2
A:A1
B:B1

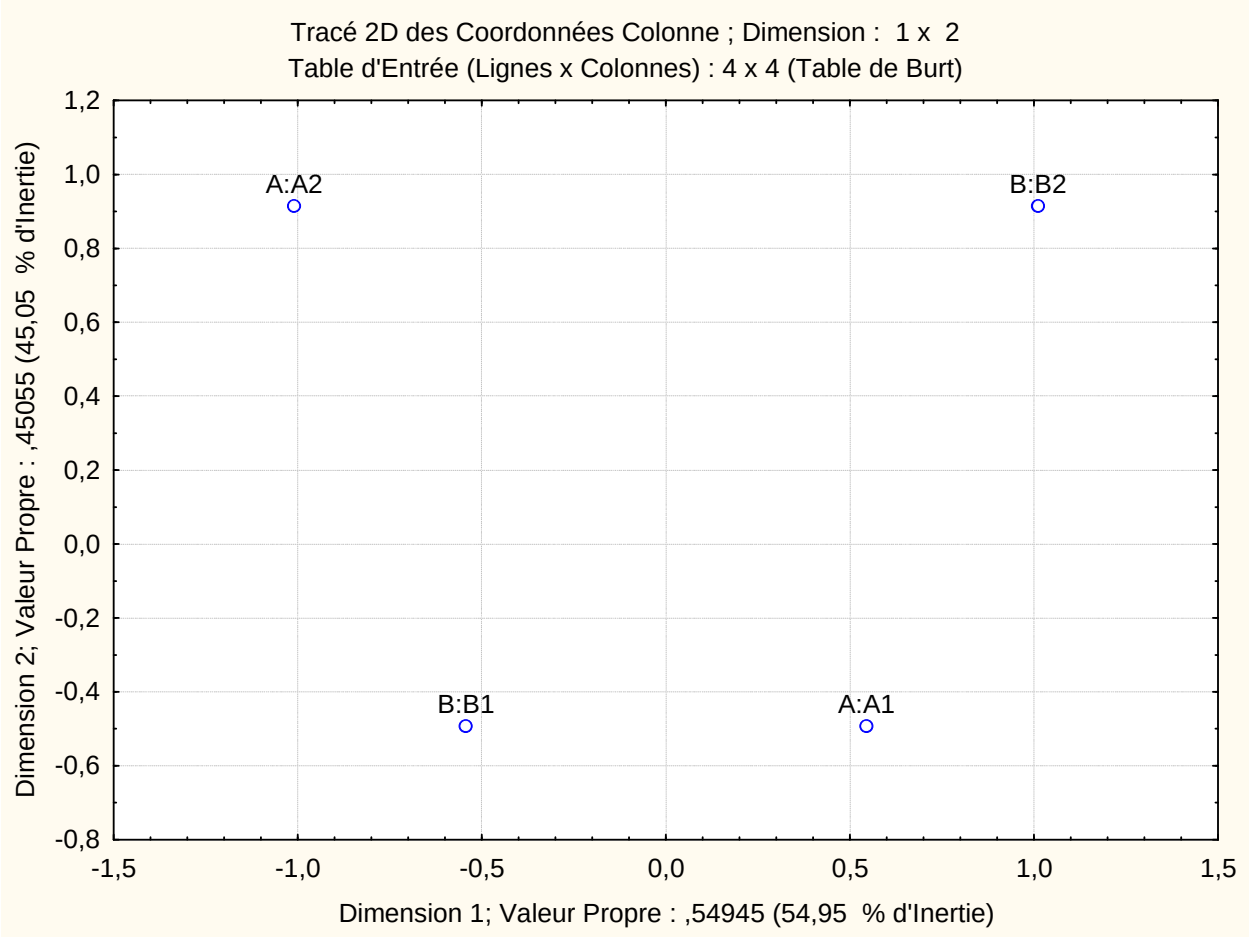
Cas 3 : les effectifs des modalités sont donnés par :

	A1	A2	Total
B1	72	48	120
B2	48	32	80
Total	120	80	200


Tracé 2D des Coordonnées Colonne ; Dimension : 1 x 2
Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 4 x 4 (Table de Burt)
Dimension 2; Valeur Propre : ,50000 (50,00 % d'Inertie)
Dimension 1; Valeur Propre : ,50000 (50,00 % d'Inertie)
1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
-1,5
A:A1
A:A2
B:B1
B:B2

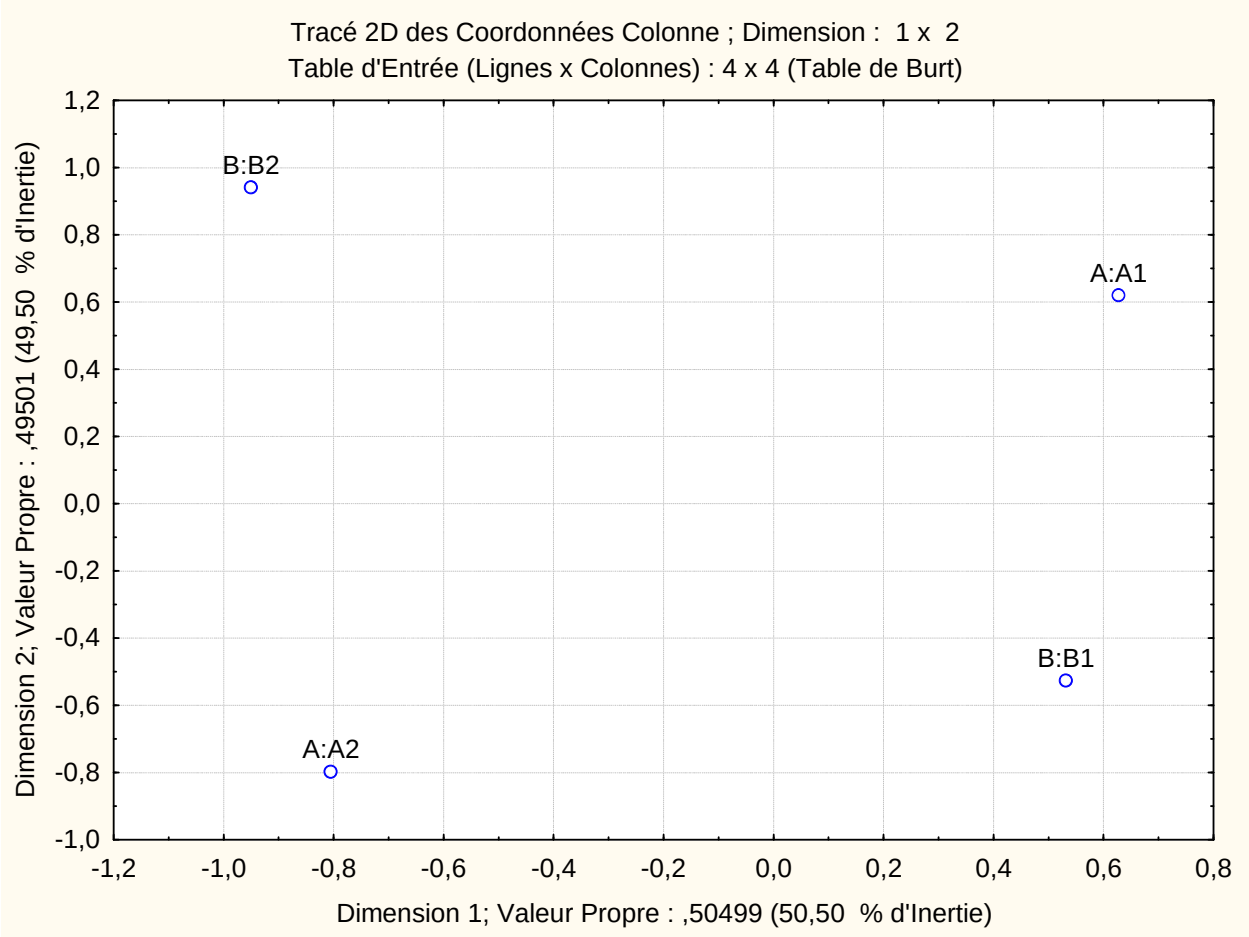
Cas 4 : les effectifs des modalités sont donnés par :

	A1	A2	Total
B1	80	50	130
B2	50	20	70
Total	130	70	200


Tracé 2D des Coordonnées Colonne ; Dimension : 1 x 2
Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 4 x 4 (Table de Burt)
Dimension 2; Valeur Propre : ,45055 (45,05 % d'Inertie)
Dimension 1; Valeur Propre : ,54945 (54,95 % d'Inertie)
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
-1,5
-1,0
-0,5
0,0
0,5
1,0
1,5
A:A2
B:B2
B:B1
A:A1

Cas 5 : les effectifs des modalités sont donnés par :

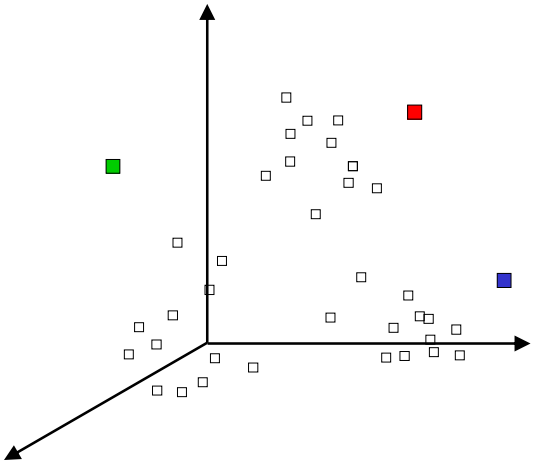
	A1	A2	Total
B1	73	56	129
B2	40	32	72
Total	113	88	201


Tracé 2D des Coordonnées Colonne ; Dimension : 1 x 2
Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 4 x 4 (Table de Burt)
Dimension 2; Valeur Propre : ,49501 (49,50 % d'Inertie)
Dimension 1; Valeur Propre : ,50499 (50,50 % d'Inertie)
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
-1,0
-1,2
-1,0
-0,8
-0,6
-0,4
-0,2
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
B:B2
A:A1
B:B1
A:A2

Méthodes de classification

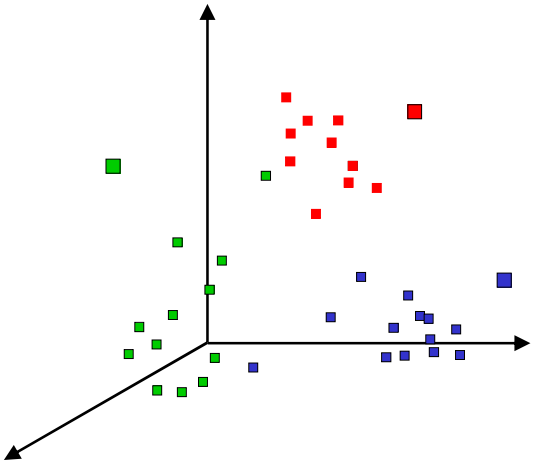
Cf. polycopié p. 98

Méthodes de type « centres mobiles »



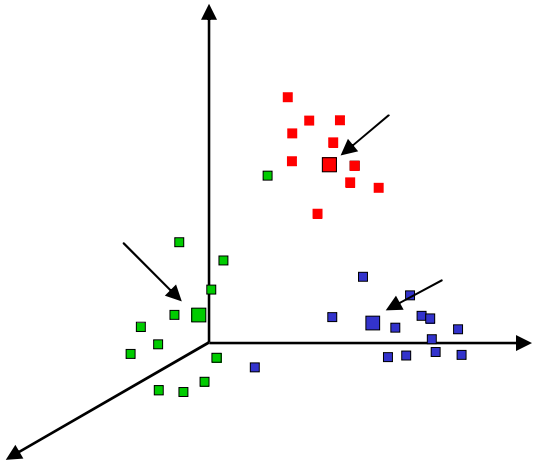
Au départ

Création aléatoire de centres de gravité.



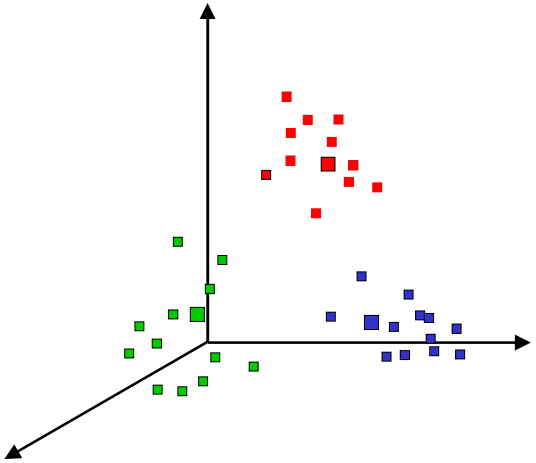
Etape 1

Chaque observation est classée en fonction de sa proximité aux centres de gravités.



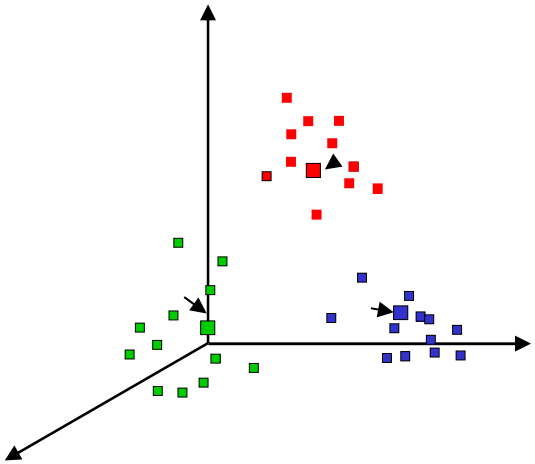
Etape 2

Chaque centre de gravité est déplacé de manière à être au centre du groupe correspondant



Etape 1’

On répète l’étape 1 avec les nouveaux centres de gravité.



Etape 2’

De nouveau, chaque centre de gravité est recalculé.

On continue jusqu’à ce que les centres de gravité ne bougent plus.

Exemple : typicalité des odeurs dans 3 cultures : FR, US, VN

Extrait des données

	1 animal-FR	2 animal-US	3 animal-VN	4 bakery-FR	5 bakery-US	6 bakery-VN	7 candy-FR	8 candy-US	9 candy-VN
amber	1,17	1,05	1,87	1,83	1,16	2,53	2,27	1,58	2,73
anise	1,07	1	1,63	2,2	2,16	2,67	6,03	6,05	3,53
apricot	1,07	1,26	1,63	2,3	1,95	3,4	5,23	3,84	5,03
blackcurrant	1,03	1,37	1,43	2,2	1,74	3,27	6,63	5,42	4,43
butter	2,97	2,26	2,03	1,37	3,16	3,43	1,3	1,32	3,4
cat pee	3,5	5,21	2,07	1	1,05	1,73	1,03	1,37	1,7
cinnamon	1,33	1,11	1,57	2,67	4,26	2,87	2,47	5,11	3,2
civet	4,8	4,79	3,97	1	1,05	1,57	1,07	1,26	1,4
clove	1,23	1,37	2,27	1,43	2,89	1,83	1,37	2,63	1,8
cookies	1,03	1	1,33	4,37	4,33	5,4	5,27	4,33	4,83
detergent	1,37	1,37	2,37	1,13	1,32	1,73	1,2	1,16	1,9
eucalyptus	1,03	1,32	1,43	1	1,05	1,73	4,1	1,63	2,33
ginger	1,27	1,53	1,73	1,47	2,05	2,97	2,43	1,63	3,77
hazelnut	1,77	2,22	2,7	4,23	2,94	2,63	3,27	3,22	2,33
honey	2,03	2,33	2,67	2,1	2,28	2,27	2,8	2,17	2,8
jasmine	1,7	1,63	2,57	1,13	1,47	2,1	1,23	2,05	2,33
lavender	1,07	1,05	1,8	1	1,16	1,83	1,27	1,47	2,47

Exemple : typicalité des odeurs dans 3 cultures : FR, US, VN

Classe 1

FR	Composition de la Classe 1 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 8 obs.
	Distance
anise	0,853238
apricot	0,556198
blackcurrant	0,475439
cookies	0,885102
melon	0,854534
milk	0,538125
pineapple	0,616581
strawberry	0,397054

VN	Composition de la Classe 1 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 6 obs.
	Distance
apricot	0,221989
blackcurrant	0,356261
cookies	0,589538
melon	0,385943
pineapple	0,337747
strawberry	0,291606

US	Composition de la Classe 5 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 5 obs.
	Distance
apricot	0,597914
blackcurrant	0,234945
melon	0,419215
pineapple	0,312601
strawberry	0,331206

Exemple : typicalité des odeurs dans 3 cultures : FR, US, VN

Classe 2

FR	Composition de la Classe 2 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 8 obs.
	Distance
amber	0,557463
jasmine	0,585252
lavender	0,868097
mango	0,378329
orange blossom	0,588759
rose	0,451861
vanilla	0,874072
violet	0,546793

VN	Composition de la Classe 3 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 8 obs.
	Distance
anise	0,366928
butter	0,344654
cinnamon	0,506660
ginger	0,282658
mango	0,411693
milk	0,314841
rose	0,444952
vanilla	0,402814

US	Composition de la Classe 4 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 9 obs.
	Distance
anise	0,905972
cinnamon	0,884537
clove	0,830185
cookies	0,579065
hazelnut	0,739649
milk	0,474403
peanut	0,495004
vanilla	0,457066
walnut	0,600739

Exemple : typicalité des odeurs dans 3 cultures : FR, US, VN

Classe 3

FR	Composition de la Classe 3 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 16 obs.
	Distance
butter	0,673286
cat pee	0,752818
cinnamon	0,810755
civet	1,056562
clove	0,818287
ginger	0,655657
hazelnut	1,093172
honey	0,605759
moldy	1,245204
mushroom	1,222151
nutmeg	0,669163
peanut	0,677682
tea	0,332057
truffle	0,551662
walnut	0,943539
woody	0,533684

VN	Composition de la Classe 2 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 10 obs.
	Distance
cat pee	0,348711
civet	0,571433
hazelnut	0,354241
leather	0,348657
moldy	0,850417
mushroom	0,439731
nutmeg	0,302967
peanut	0,348855
truffle	0,380382
woody	0,252038

US	Composition de la Classe 2 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 10 obs.
	Distance
butter	0,686537
cat pee	0,830411
civet	0,712920
honey	0,502343
leather	0,551503
moldy	0,694570
mushroom	0,602322
tea	0,417894
truffle	0,512148
woody	0,487014

Exemple : typicalité des odeurs dans 3 cultures : FR, US, VN

Classe 4

FR	Composition de la Classe 4 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 6 obs.
	Distance
detergent	0,433169
leather	0,445424
moth ball	0,362147
musk	0,483415
pine	0,471897
soap	0,583448

VN	Composition de la Classe 4 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 12 obs.
	Distance
clove	0,431683
detergent	0,299191
honey	0,441126
jasmine	0,396467
lavender	0,326566
moth ball	0,371675
musk	0,280186
orange blossom	0,531775
pine	0,395162
soap	0,573349
tea	0,357944
violet	0,174551

US	Composition de la Classe 3 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 12 obs.
	Distance
amber	0,687928
detergent	0,424100
jasmine	0,652539
lavender	0,461172
mango	0,434236
moth ball	0,814012
musk	0,584099
orange blossom	0,541148
pine	0,579675
rose	0,542605
soap	0,883078
violet	0,560355

Exemple : typicalité des odeurs dans 3 cultures : FR, US, VN

Classe 5

FR	Composition de la Classe 5 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 2 obs.
	Distance
eucalyptus	0,462265
wintergreen	0,462265

VN	Composition de la Classe 5 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 4 obs.
	Distance
amber	0,435829
eucalyptus	0,291722
walnut	0,313654
wintergreen	0,278881

US	Composition de la Classe 1 (Odors dans Odors.stw) et Distances au Centre de Classe Respectif Classe avec 4 obs.
	Distance
eucalyptus	0,794737
ginger	0,586028
nutmeg	0,709252
wintergreen	0,780444

Classification Ascendante Hiérarchique

Les quatre étapes de la méthode :

- Choix des variables représentant les individus

- Choix d'un indice de dissimilarité

- Choix d'un indice d'agrégation

- Algorithme de classification et résultat produit

Quelques distances ou indices de dissimilarité

- Distance Euclidienne. $$d(I_i,I_j)=\sqrt{\sum_k (x_{ik}-x_{jk})^2}$$

- Distance Euclidienne au carré. $$d(I_i,I_j)=\sum_k (x_{ik}-x_{jk})^2$$

- Distance du City-block (Manhattan) : $$d(I_i,I_j)=\sum_k \left|x_{ik}-x_{jk}\right|$$

- Distance de Tchebychev : $$d(I_i,I_j)=Max\ \left|x_{ik}-x_{jk}\right|$$

- Distance à la puissance. $$d(I_i,I_j)=\left(\sum_k \left|x_{ik}-x_{jk}\right|^p\right)^{1/r}$$

- Percent disagreement. $$d(I_i,I_j)=\frac{Nombre\ \ de\ \ x_{ik}\neq x_{jk}}{K}$$

- 1- r de Pearson : $$d(I_i,I_j)=1-r_{ij}$$

Quelques indices d'agrégation

- Saut minimum ou « single linkage » $D(A,B) = \min_{I \in A} \min_{J \in B} d(I,J)$

- Diamètre ou « complete linkage » : $D(A,B) = \max_{I \in A} \max_{J \in B} d(I,J)$

- Moyenne non pondérée des groupes associés: $D(A,B) = \frac{1}{n_A n_B} \sum_{I \in A, J \in B} d(I,J)$

- Moyenne pondérée des groupes associés : $D(A,B) = \frac{1}{(n_A + n_B)(n_A + n_B - 1)} \sum_{I,J \in A \cup B} d(I,J)$

- Centroïde non pondéré des groupes associés.

- Centroïde pondéré des groupes associés (médiane).

- Méthode de Ward (méthode du moment d'ordre 2). Si une classe M est obtenue en regroupant les classes K et L, sa distance à la classe J est donnée par :

$$D(M,J) = \frac{(N_J + N_K)D(K,J) + (N_J + N_L)D(L,J) - N_J D(K,L)}{N_J + N_K + N_L}$$

Distance Euclidienne au carré et méthode de Ward

Inertie totale = Inertie « intra » + Inertie « inter »

A chaque étape, on réunit les deux classes de façon à augmenter le moins possible l'inertie « intra »

$$I = \sum_{j=1}^{g} \sum_{i=1}^{n_j} G_j M_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{g} n_j G G_j^2$$

$$\begin{matrix} \text{Inertie} \\ \text{totale} \end{matrix} = \sum_{\text{les classes}} \begin{matrix} \text{Inertie} \\ \text{dans} \end{matrix} + \begin{matrix} \text{Inertie des points moyens} \\ \text{pondérés par} \\ \text{les effectifs des classes} \end{matrix}$$

L'algorithme de classification

Étape 1 : n éléments à classer ;

Étape 2 : Construction de la matrice de distances entre les n éléments et recherche les deux plus proches, que l'on agrège en un nouvel élément. On obtient une première partition à n-1 classes;

Étape 3 : Construction d'une nouvelle matrice des distances qui résultent de l'agrégation, en calculant les distances entre le nouvel élément et les éléments restants (les autres distances sont inchangées). Recherche des deux éléments les plus proches, que l'on agrège. On obtient une deuxième partition avec n-2 classes et qui englobe la première;

…

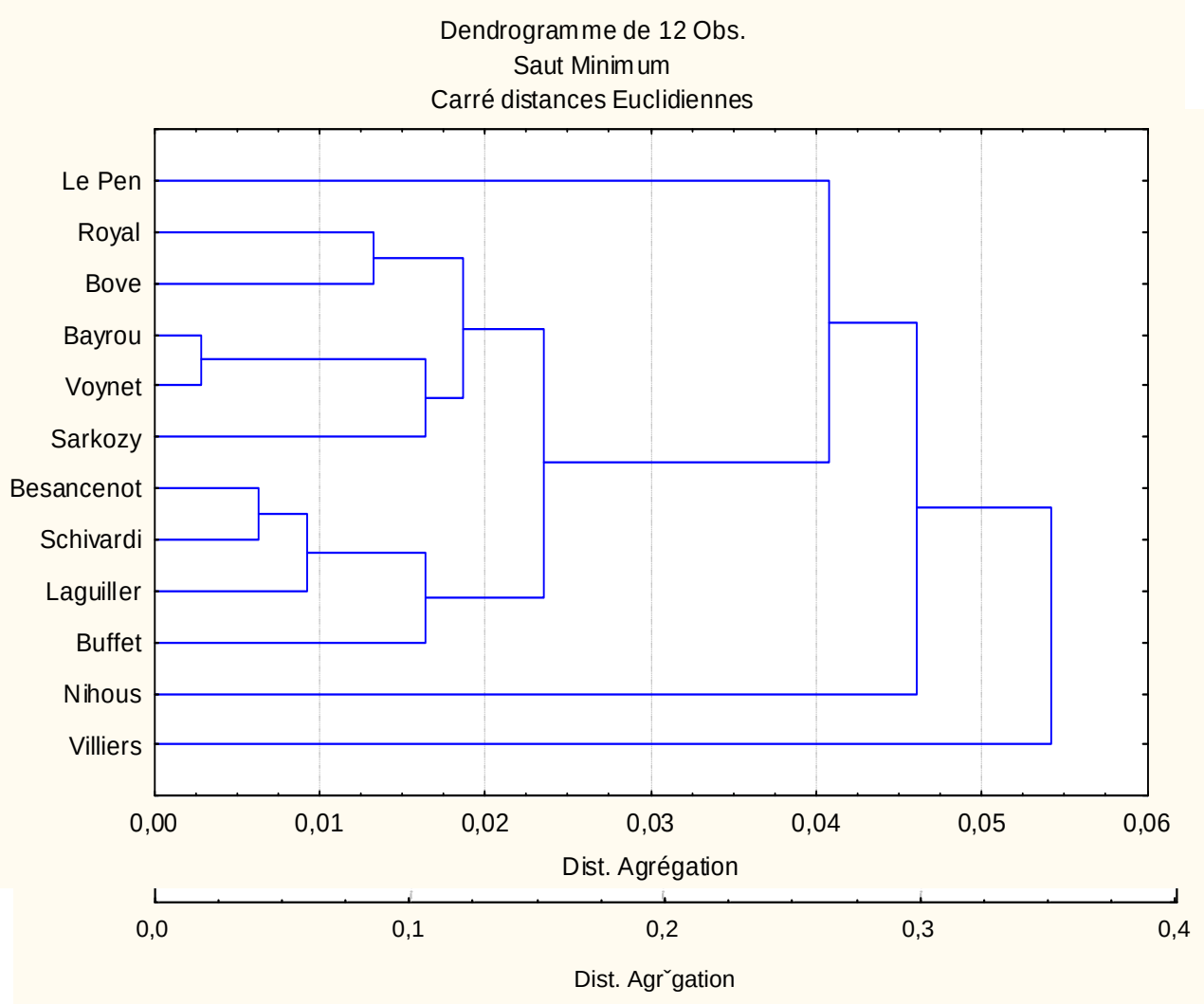
Étape m : on calcule les nouvelles distances, et l'on réitère le processus jusqu'à n'avoir plus qu'un seul élément regroupant tous les objets et qui constitue la dernière partition.

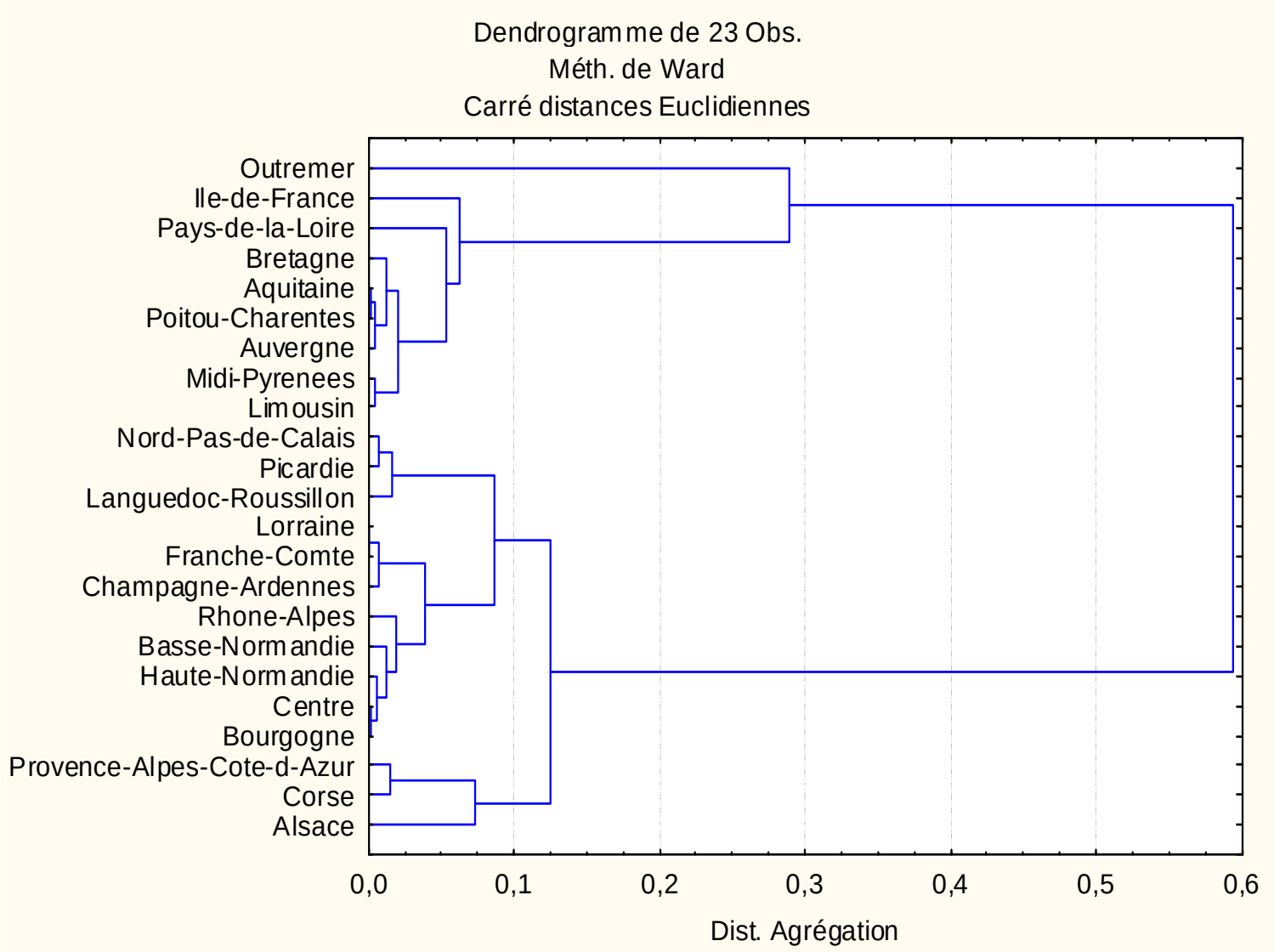
Résultat obtenu :

Une hiérarchie de classes telles que :
- toute classe est non vide
- tout individu appartient à une (et même plusieurs) classes
- deux classes distinctes sont disjointes, ou vérifient une relation d'inclusion (l'une d'elles est incluse dans l'autre)
- toute classe est la réunion des classes qui sont incluses dans elle.

Ce résultat est fréquemment représenté à l’aide d’un dendrogramme

Exemples de dendrogrammes




Dendrogramme de 23 Obs.
Méth. de Ward
Carré distances Euclidiennes
Outremer
Ile-de-France
Pays-de-la-Loire
Bretagne
Aquitaine
Poitou-Charentes
Auvergne
Midi-Pyrenees
Limousin
Nord-Pas-de-Calais
Picardie
Languedoc-Roussillon
Lorraine
Franche-Comte
Champagne-Ardennes
Rhone-Alpes
Basse-Normandie
Haute-Normandie
Centre
Bourgogne
Provence-Alpes-Cote-d-Azur
Corse
Alsace
0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
Dist. Agrégation

Régression linéaire Multiple

Cf. polycopié p. 117

Echantillon de n individus statistiques :

- p variables numériques X1, X2, ..., Xp (variables indépendantes ou explicatives)

- une variable numérique Y (variable dépendante, ou "à expliquer").

Exemple (30 comtés américains) :
VARI_POP : Variation de la Population (1960-1970)
N_AGRIC : Nb. de personnes travaillant dans le secteur primaire
TX_IMPOS : Taux d'imposition des propriétés
PT_PHONE : Pourcentage d'installations téléphoniques
PT_RURAL : Pourcentage de la population vivant en milieu rural
AGE : Age médian
PT_PAUVR : Pourcentage de familles en dessous du seuil de pauvreté

Matrice des corrélations

	VARI_POP	N_AGRIC	**PT_PAUVR**	TX_IMPOS	PT_PHONE	PT_RURAL	AGE
VARI_POP	1,00	0,04	**-0,65**	0,13	0,38	-0,02	-0,15
N_AGRIC	0,04	1,00	**-0,17**	0,10	0,36	-0,66	-0,36
PT_PAUVR	**-0,65**	**-0,17**	**1,00**	**0,01**	**-0,73**	**0,51**	**0,02**
TX_IMPOS	0,13	0,10	**0,01**	1,00	-0,04	0,02	-0,05
PT_PHONE	0,38	0,36	**-0,73**	-0,04	1,00	-0,75	-0,08
PT_RURAL	-0,02	-0,66	**0,51**	0,02	-0,75	1,00	0,31
AGE	-0,15	-0,36	**0,02**	-0,05	-0,08	0,31	1,00

Le modèle linéaire :

On cherche à exprimer Y sous la forme :

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + ... + b_p X_p + E$$

où E (erreur commise en remplaçant Y par la valeur estimée) est nulle en moyenne, et de variance minimale.

Remarque : le « poids » d'un prédicteur est inchangé par changement d'unité ou d'échelle linéaire.

Solution au problème :

Les coefficients b_i ($1 \leq i \leq p$) sont les solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} Cov(X_1, X_1)b_1 + Cov(X_1, X_2)b_2 + ... + Cov(X_1, X_p)b_p = Cov(X_1, Y) \\ Cov(X_2, X_1)b_1 + Cov(X_2, X_2)b_2 + ... + Cov(X_2, X_p)b_p = Cov(X_2, Y) \\ .... \\ Cov(X_p, X_1)b_1 + Cov(X_p, X_2)b_2 + ... + Cov(X_p, X_p)b_p = Cov(X_p, Y) \end{cases}$$

et

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X_1} - b_2\overline{X_2} - ... - b_p\overline{X_p}$$

Sur l'exemple proposé :

PT_PAUVR = 31,2660 - 0,3923 VARI_POP + 0,0008 N_AGRIC+ 1,2301 TX_IMPOS - 0,0832 PT_PHONE + 0,1655 PT_RURAL - 0,4193 AGE

Coefficients standardisés :

$$\beta_i = \frac{\sigma(X_i)}{\sigma(Y)} b_i$$

VARI_POP	N_AGRIC	TX_IMPOS	PT_PHONE	PT_RURAL	AGE
-0,630788	0,238314	0,038799	-0,129627	0,618746	-0,188205

En général, on ne s'intéresse pas à l'équation de régression elle-même, mais on compare les coefficients, ou mieux les coefficients standardisés entre eux.

On mesure ainsi la variation de Y estimé lorsque l'un des prédicteurs varie de 1 unité (ou de 1 écart type) « *toutes choses égales par ailleurs* ».

Mais, comme les prédicteurs sont en général corrélés entre eux, « *toutes choses égales par ailleurs* » est un mythe…

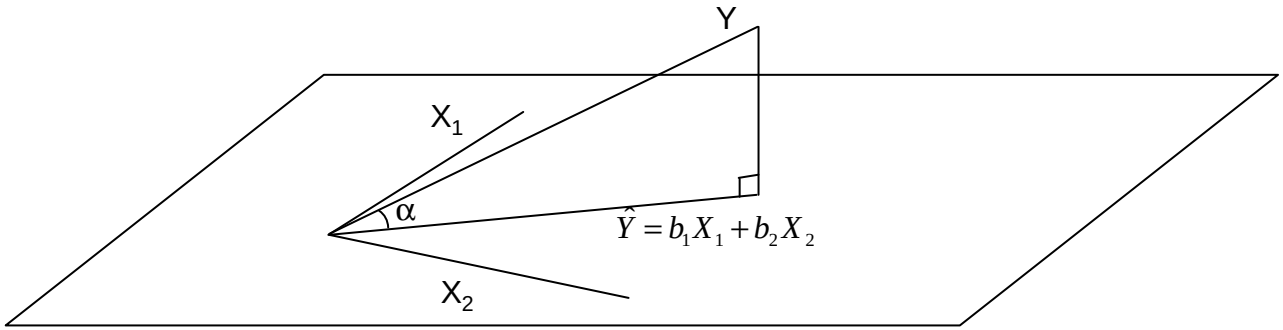
Alternative proposée : *régression sur les composantes principales*.

Une autre approche courante : essayer plusieurs modèles, par exemple en faisant varier les prédicteurs, et retenir « le meilleur ».

Test des coefficients de la régression

	PT_PAU VR	PT_PAU VR	PT_PAU VR	PT_PAU VR	-95,00%	+95,00%
	(param.)	Err-Type	t	p	Lim.Conf	Lim.Conf
Ord.Orig.	31,2660	13,2651	**2,3570**	0,0273	3,8251	58,7070
VARI_POP	-0,3923	0,0805	**-4,8742**	0,0001	-0,5589	-0,2258
N_AGRIC	0,0008	0,0004	1,6903	0,1045	-0,0002	0,0017
TX_IMPOS	1,2301	3,1899	0,3856	0,7033	-5,3686	7,8288
PT_PHONE	-0,0832	0,1306	-0,6376	0,5300	-0,3533	0,1868
PT_RURAL	0,1655	0,0618	**2,6766**	0,0135	0,0376	0,2935
AGE	-0,4193	0,2554	-1,6415	0,1143	-0,9476	0,1091

Approche factorielle de la régression



Expliquer la variabilité de Y à partir de celle des X_j :

Combinaison linéaire des X_j qui reproduit « au mieux » la variabilité des individus selon Y : combinaison linéaire la plus corrélée avec Y.

Solution : combinaison linéaire des X_j qui fait avec Y un angle minimum.

Test de la régression :

Variance de Y = Variance expliquée + Variance résiduelle

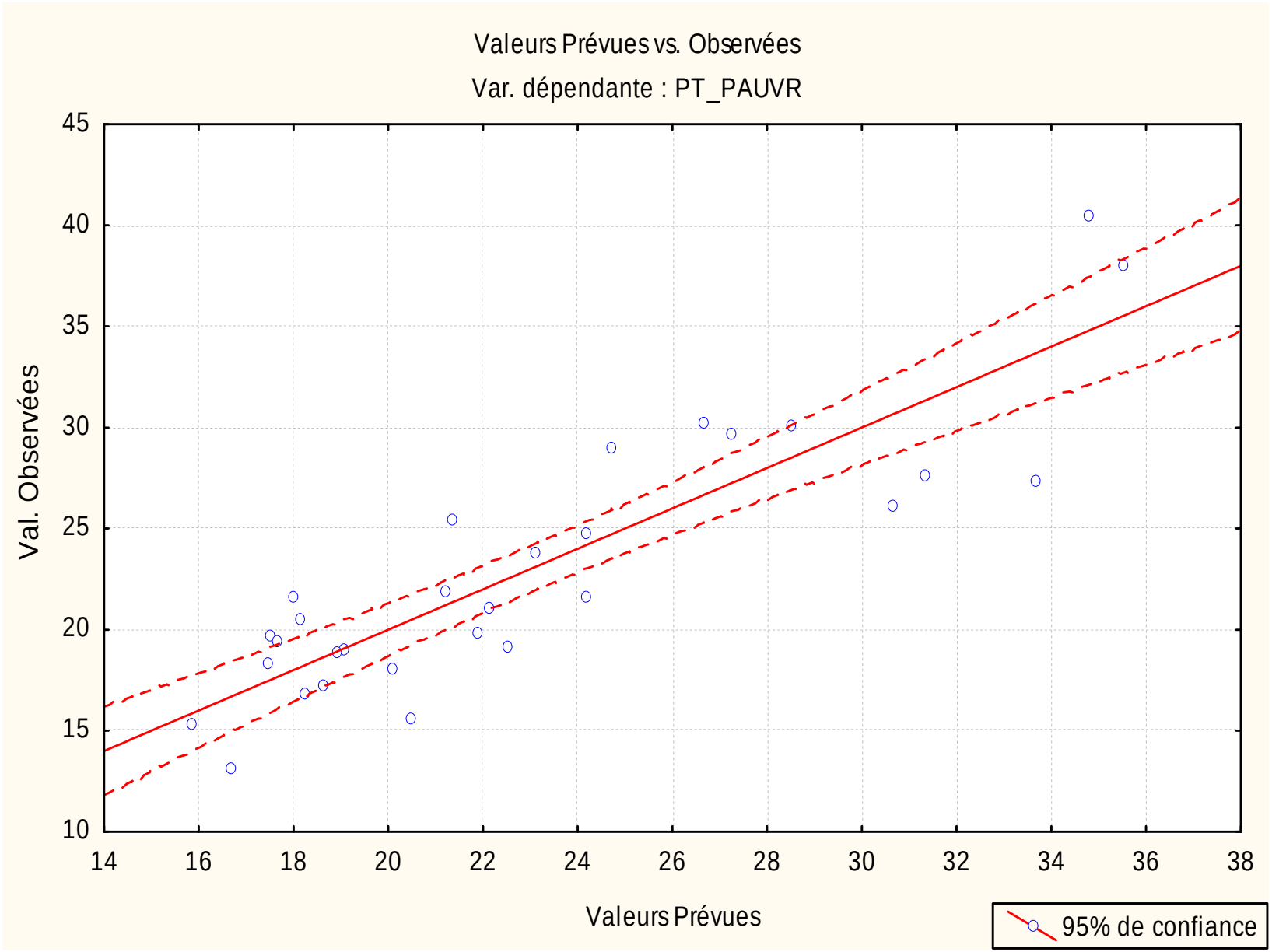
$$Var(Y) = Var(\hat{Y}) + Var(Y - \hat{Y})$$

Analyse de variance

	Sommes Carrés	dl	Moyennes Carrés	F	niveau p
Régress.	932,065	6	155,3441	13,44909	0,000002
Résidus	265,662	23	11,5505		
Total	1197,727				

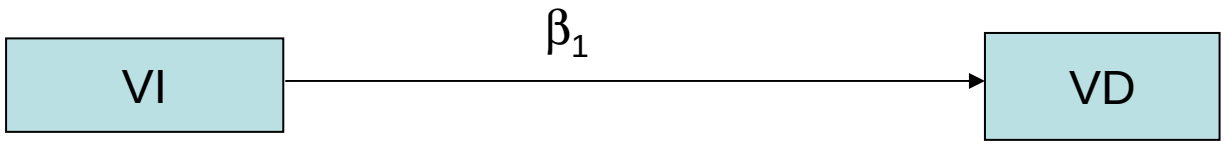
Coefficient de détermination :

$$R^2 = \frac{Var(\hat{Y})}{Var(Y)} = 0{,}7782$$


Valeurs Prévues vs. Observées
Var. dépendante : PT_PAUVR
Val. Observées
Valeurs Prévues
95% de confiance
45
40
35
30
25
20
15
10
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38

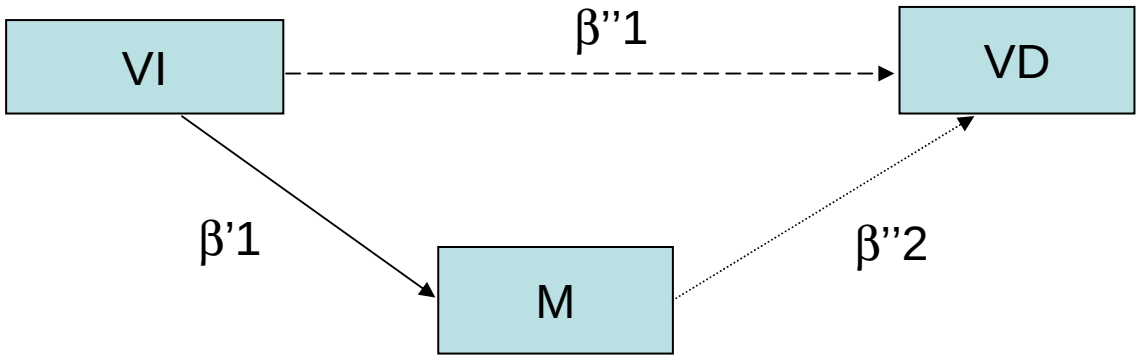
Analyse de médiation

1) Régression de la VD sur la VI : VD = b0 + b1 VI
Coefficient de régression standardisé : β1



2) Régression de la médiation sur la VI : M=b'0 + b'1 VI
Coefficient de régression standardisé : β'1

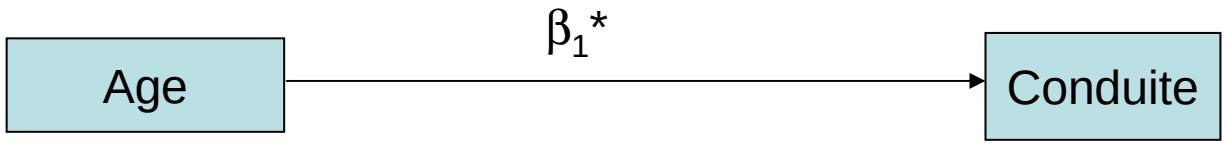
3) Régression multiple de la VD sur VI et M : VD = b''0 + b''1 VI + b''2 M
Coefficients de régression standardisés : β''1, β''2



Interprétation :

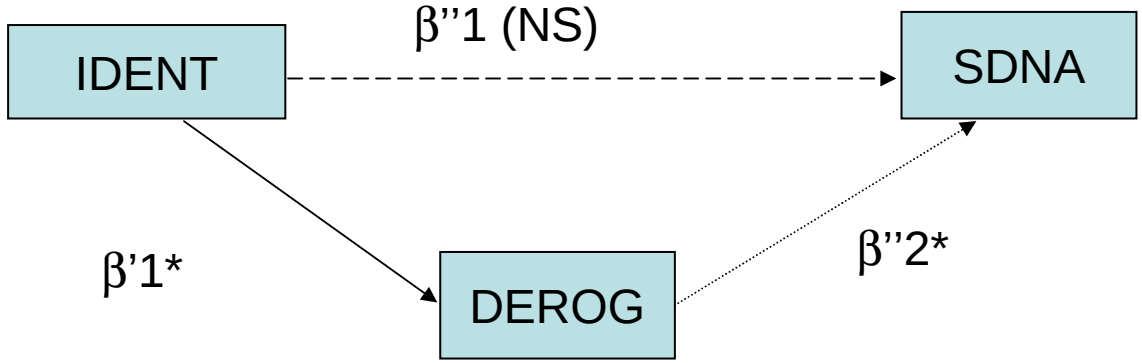
Si β’’1 est nettement plus proche de 0 que β1, en particulier si β’’1 n’est pas significativement différent de 0 alors que β1 l’était, il y a médiation (partielle ou totale)

1) Régression de la VD sur la VI : Conduite = b0 + b1 Age
Coefficient de régression standardisé : β1

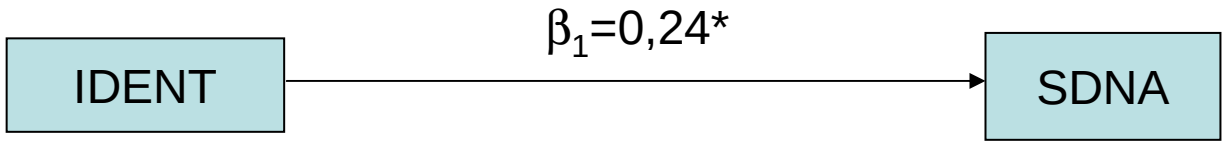


2) Régression de la médiation sur la VI : Expérience=b'0 + b'1 Age
Coefficient de régression standardisé : β'1

3) Régression multiple de la VD sur VI et M :
Conduite = b''0 + b''1 Age + b''2 Expérience
Coefficients de régression standardisés : β''1, β''2

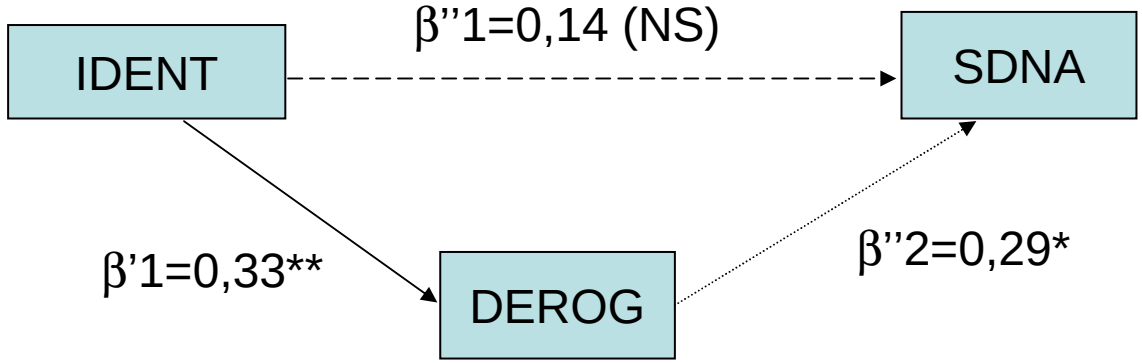


1) Régression de la VD sur la VI : SDNA = b0 + b1 IDENT
Coefficient de régression standardisé : β1

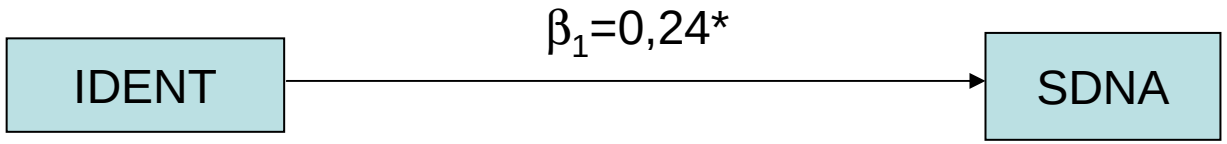


2) Régression de la médiation sur la VI : DEROG=b'0 + b'1 IDENT
Coefficient de régression standardisé : β'1

3) Régression multiple de la VD sur VI et M :
SDNA = b''0 + b''1 IDENT + b''2 DEROG
Coefficients de régression standardisés : β''1, β''2

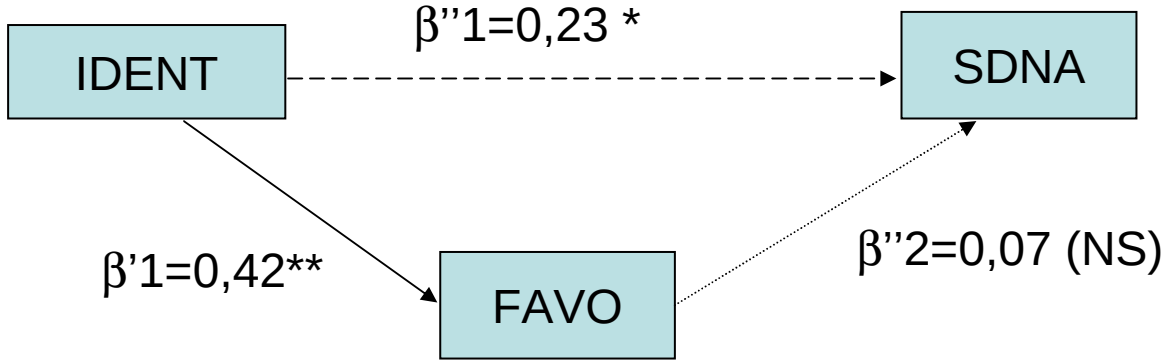


1) Régression de la VD sur la VI : SDNA = b0 + b1 IDENT
Coefficient de régression standardisé : β1



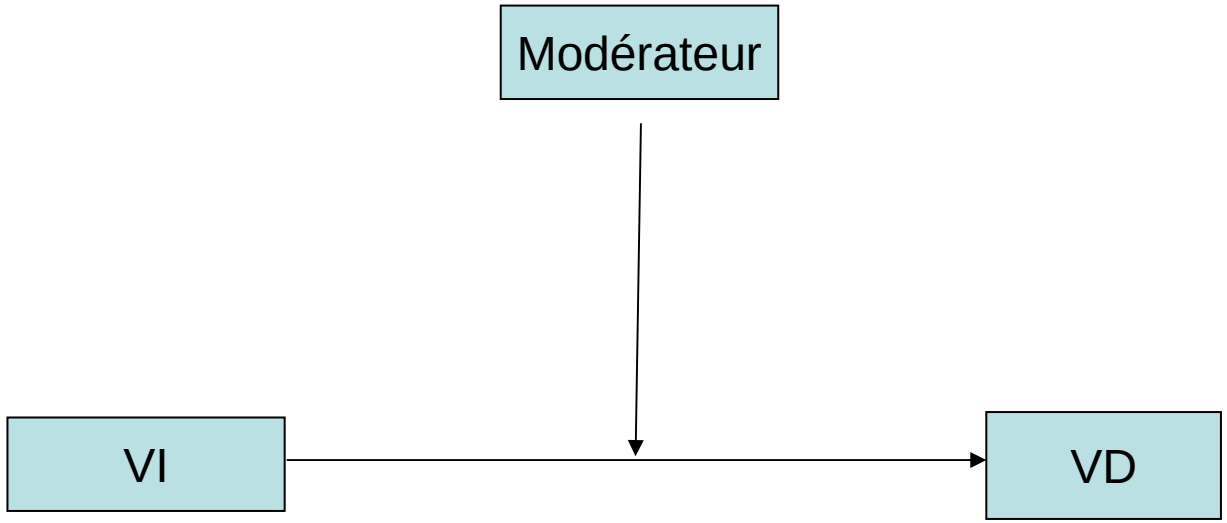
2) Régression de la médiation sur la VI : DEROG=b'0 + b'1 IDENT
Coefficient de régression standardisé : β'1

3) Régression multiple de la VD sur VI et M :
SDNA = b''0 + b''1 IDENT + b''2 DEROG
Coefficients de régression standardisés : β''1, β''2



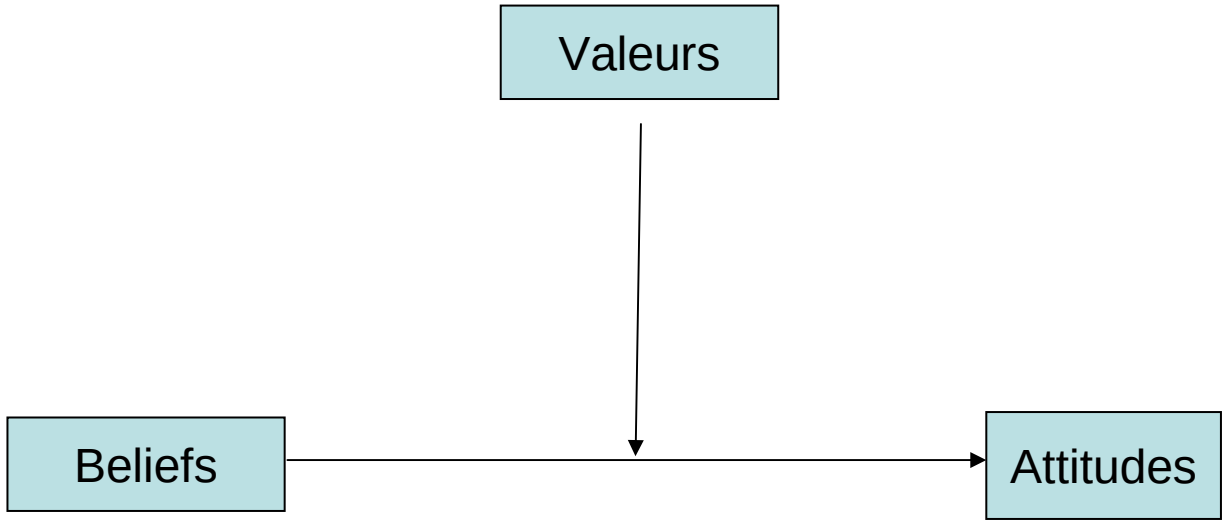
Pas d'effet de médiation

Aperçu sur l’analyse de modération



Une variable modératrice est une variable qui module le sens et/ou la force de l’effet de X (variable indépendante) sur Y (variable dépendante)

Aperçu sur l’analyse de modération

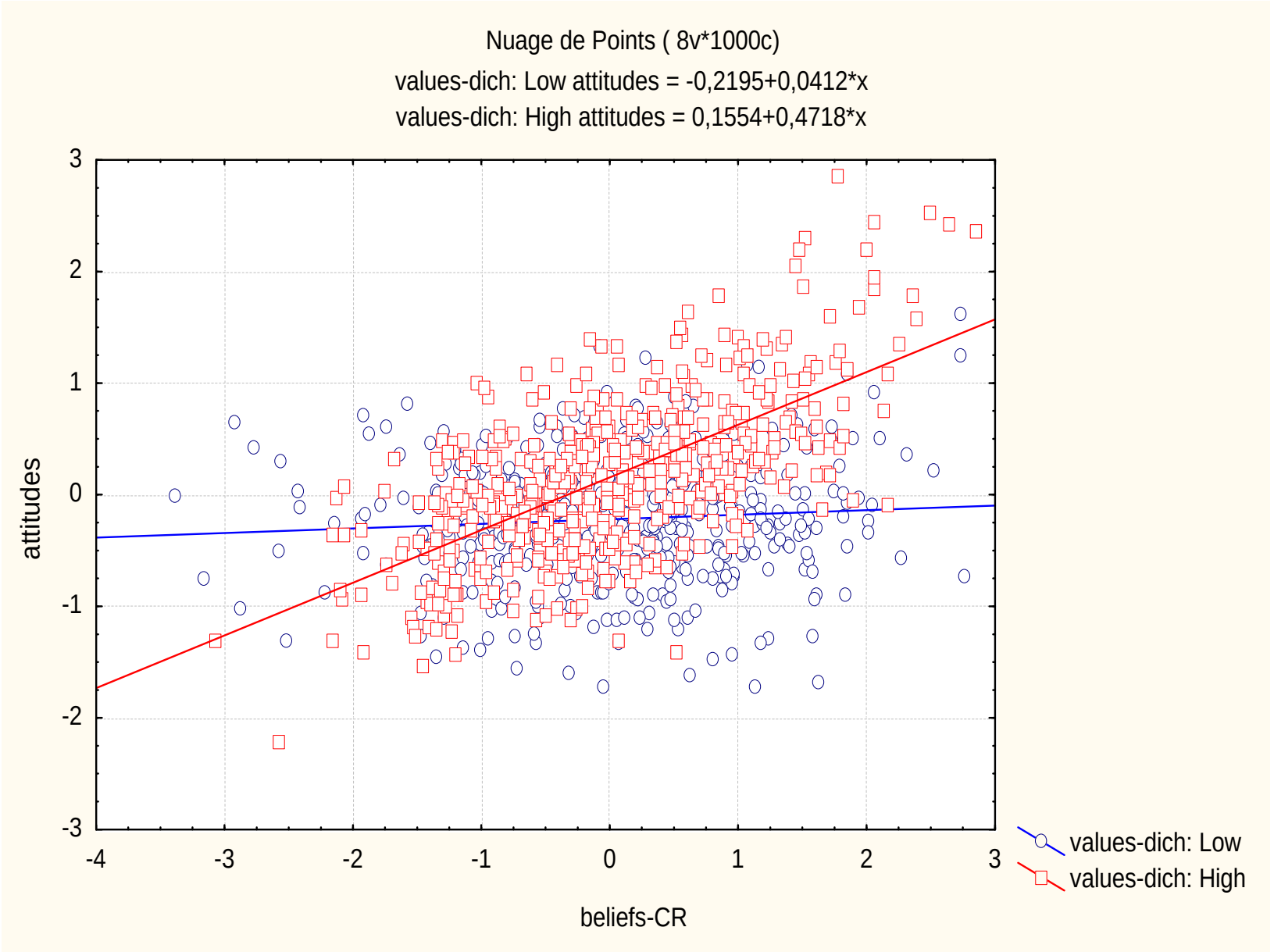


Mise en évidence de l’effet de modération : régression linéaire de Attitudes sur Beliefs, Valeurs et le produit des variables centrées Beliefs-centré et Valeurs-centré

Résultats de la régression linéaire

Effet	Paramètres Estimés (tra.sta dans tra.stw) Paramétrisation sigma-restreint			
	attitudes Param.	attitudes Err-Type	attitudes t	attitudes p
Ord.Orig.	-0,0383	0,0164	-2,3378	0,0196
beliefs-CR	0,2428	0,0164	14,8032	0,0000
values-CR	0,2136	0,0165	12,9837	0,0000
beliefs-CR*values-CR	0,2434	0,0161	15,0996	0,0000

Effet	Tests Univariés de Significativité de attitudes (tra.sta dans tra.stw) Paramétrisation sigma-restreint Décomposition efficace de l'hypothèse				
	SC	Degré de Liberté	MC	F	p
Ord.Orig.	1,4676	1	1,46759	5,4652	0,019596
beliefs-CR	58,8452	1	58,84516	219,1343	0,000000
values-CR	45,2687	1	45,26872	168,5768	0,000000
beliefs-CR*values-CR	61,2251	1	61,22513	227,9971	0,000000
Erreur	267,4605	996	0,26853		


Nuage de Points (8v*1000c)
values-dich: Low attitudes = -0,2195+0,0412*x
values-dich: High attitudes = 0,1554+0,4718*x
attitudes
beliefs-CR
values-dich: Low
values-dich: High

Régression Logistique

Cf. polycopié p. 135

Sur un échantillon de n individus statistiques, on a observé :

- p variables numériques ou dichotomiques X1, X2, ..., Xp (variables indépendantes ou explicatives)

- une variable dichotomique Y (variable dépendante, ou "à expliquer").

Exemple :

Echantillon de 30 sujets pour lesquels on a relevé :

- d'une part le niveau des revenus (variable numérique)

- d'autre part la possession ou non d'un nouvel équipement électro-ménager.

Exemple

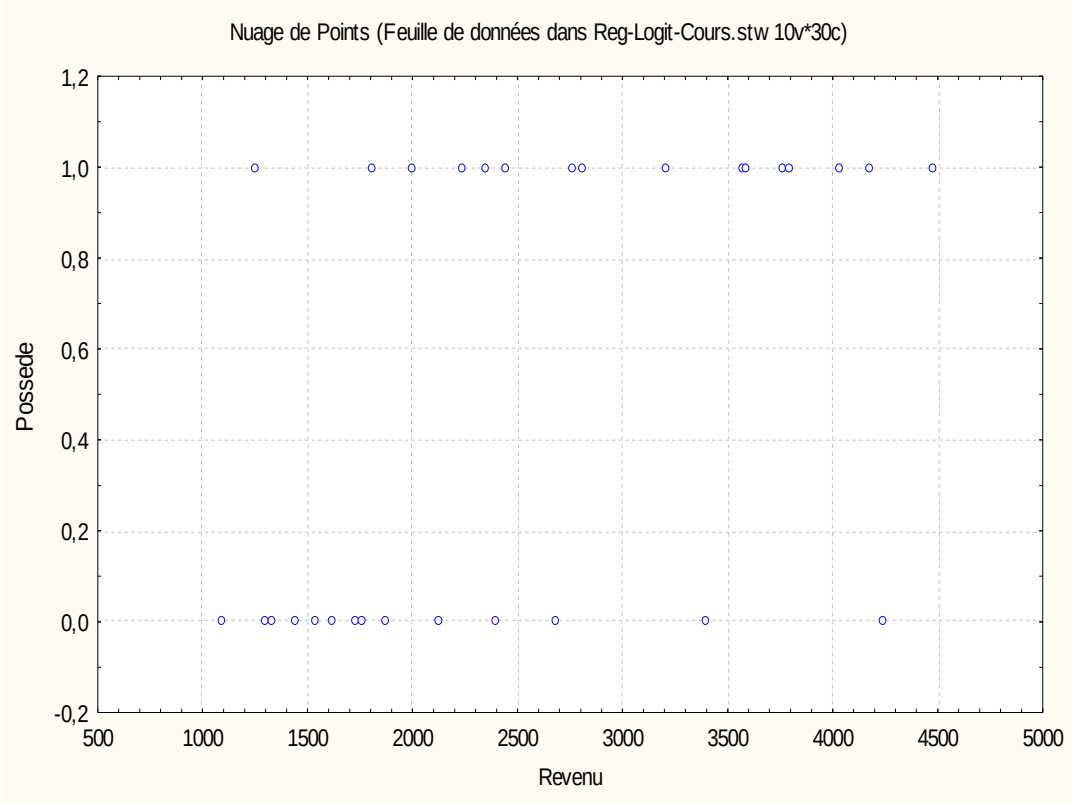
Revenu	1085	1304	1331	1434	1541	1612	1729	1759
Possède	0	0	0	0	0	0	0	0

Revenu	1863	2121	2395	2681	3390	4237	1241
Possède	0	0	0	0	0	0	1

Revenu	1798	1997	2234	2346	2436	2753	2813	3204
Possède	1	1	1	1	1	1	1	1

Revenu	3564	3592	3762	3799	4037	4168	4484
Possède	1	1	1	1	1	1	1

Nuage de points



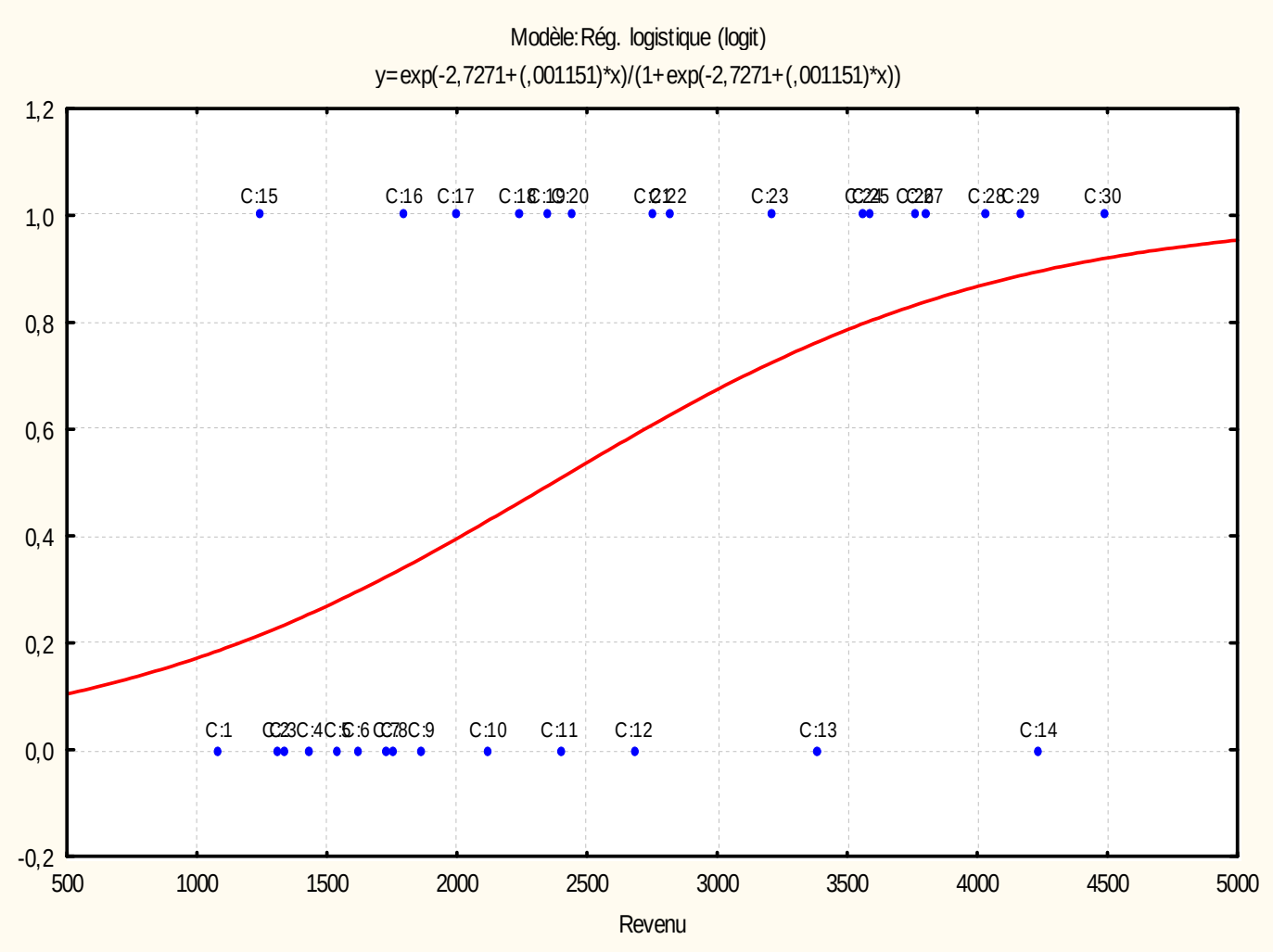
Rapport de chances et transformation logit

Rapport de chances ou cote :

$$p_1 = \frac{P(Y=1)}{1-P(Y=1)}$$

Transformation logit

$$\text{logit}(P) = \ln\left(\frac{P}{1-P}\right)$$



$$\text{logit}(Y) = -2{,}7271 + 0{,}001151\ X$$

Aides à l'interprétation : test du modèle, odds-ratio ou rapport de cotes

Une statistique qui suit une loi du khi-2 permet de tester la qualité du modèle. Sur notre exemple :

Khi-2 = 7,63, dl=1, p=0,006

On utilise aussi fréquemment l'odds-ratio ou rapport de cotes :

La contribution de la variable X à la variation de Y est calculée par :

$$OR = \exp(\text{Coefficient de X dans le modèle})$$

L'odds-ratio correspondant au coefficient 0,001151 est : $e^{0,001151}$=1,0012.

Autrement dit, une augmentation du revenu de 1 unité se traduit par une multiplication de la probabilité par 1,0012.

Intervalle de confiance pour OR : [1,000173, 1,002139] : significatif puisque l'intervalle ne contient pas la valeur 1.

L'odds-ratio est défini comme le rapport de deux rapports de chances. Ainsi, l'odds-ratio relatif à l'étendue des valeurs observées est défini de la manière suivante :

- On calcule le rapport de chances relatif à la plus grande valeur observée du revenu :

Pour X = 4484, P1=0,919325 et $\frac{P_1}{1-P_1} = 11{,}3954$

- On calcule le rapport de chances relatif à la plus petite valeur observée du revenu :

Pour X = 1085, P2=0,185658 et $\frac{P_2}{1-P_2} = 0{,}2280$

- L'odds-ratio est obtenu comme quotient des deux rapports précédents :

$$\mathrm{OR} = \frac{\frac{P_1}{1-P_1}}{\frac{P_2}{1-P_2}} = \frac{11{,}3954}{0{,}2280} = 49{,}98$$

Analyse discriminante

Cf. polycopié p. 143

Position du problème

On dispose de n observations sur lesquelles on a relevé :

-les valeurs d'une variable catégorielle Y comportant quelques modalités (2, 3, ...) : c'est le **groupe** ou diagnostic.

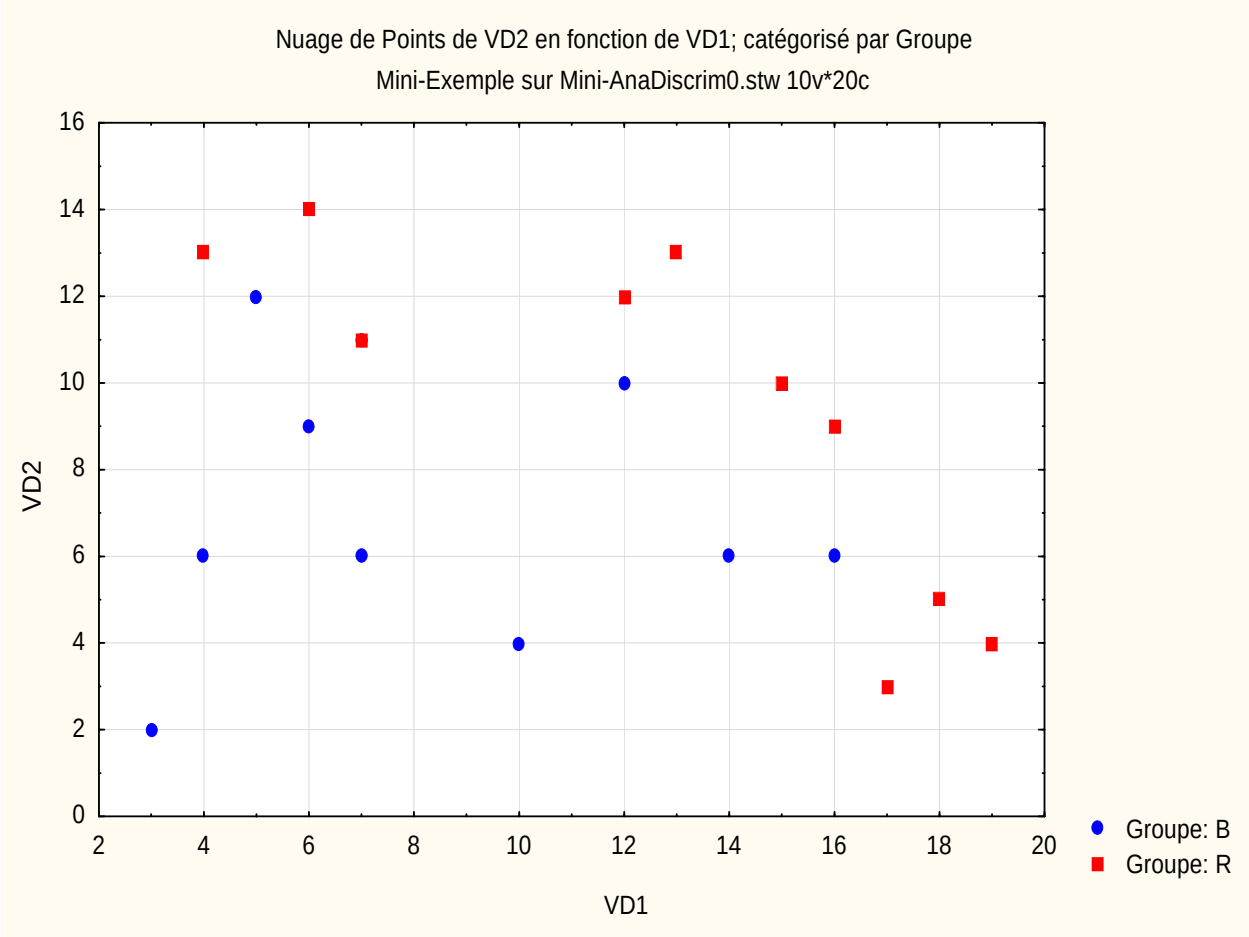
- les valeurs de p variables numériques : X1, X2, ..., Xp : ce sont les **prédicteurs**.

On se pose des questions telles que :

- la valeur de Y est-elle liée aux valeurs de X1, X2, ..., Xp ?

- Etant donné d'autres observations, pour lesquelles X1, X2, ..., Xp sont connues, mais Y ne l'est pas, est-il possible de prévoir Y (le groupe), et avec quel degré de certitude ?

Mini-exemple : Deux variables VD1 et VD2 sur deux échantillons d'effectif 10 :



Les deux groupes diffèrent-ils significativement du point de vue de la variable VD1 ou de la variable VD2 ?

Variable	Analyse de la Variance (Mini-Exemple dans Mini-AnaDiscrim0.stw) Effets significatifs marqués à p < ,05000							
	SC Effet	dl Effet	MC Effet	SC Erreur	dl Erreur	MC Erreur	F	p
VD1	92,45000	1	92,45000	430,5000	18	23,91667	3,865505	0,064905
VD2	24,20000	1	24,20000	238,0000	18	13,22222	1,830252	0,192848

Le test de Student, ou l'ANOVA menée sur chacune des deux variables montrent que ce n'est pas le cas.

Les deux groupes diffèrent-ils significativement du point de vue du *couple* de variables (VD1,VD2)?

On peut répondre à cette question à l'aide d'une MANOVA (multivariate analysis of variance – analyse de variance multivariée).

$$H_0 : \begin{bmatrix} \mu_B \\ \mu'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_R \\ \mu'_R \end{bmatrix} \qquad H_1 : \begin{bmatrix} \mu_B \\ \mu'_B \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \mu_R \\ \mu'_R \end{bmatrix}$$

Effet	Tests Multivariés de Significativité (Mini-Exemple) Paramétrisation sigma-restreinte Décomposition efficace de l'hypothèse					
	Test	Valeur	F	Effet dl	Erreur dl	p
ord. origine	Wilk	0,044029	184,5529	2	17	0,000000
Groupe	Wilk	0,619780	5,2145	2	17	0,017140

L'analyse discriminante permet d'obtenir des résultats complémentaires.

N=20	Synthèse de l'Analyse Discriminante (Mini-Exemple) Vars dans le modèle : 2; Classmt : Groupe (2 grps) Lambda Wilk : ,61978 F approx. (2,17)=5,2145 p< ,0171					
	Wilk (Lambda)	Partiel (Lambda)	F d'exc. (1,17)	valeur p	Tolér.	1-Tolér. (R^2)
VD1	0,907704	0,682800	7,897492	0,012043	0,754497	0,245503
VD2	0,823214	0,752878	5,580020	0,030355	0,754497	0,245503

Matrice de classification ou Matrice de confusion.

Tableau croisant la classification observée avec la classification calculée par la méthode.

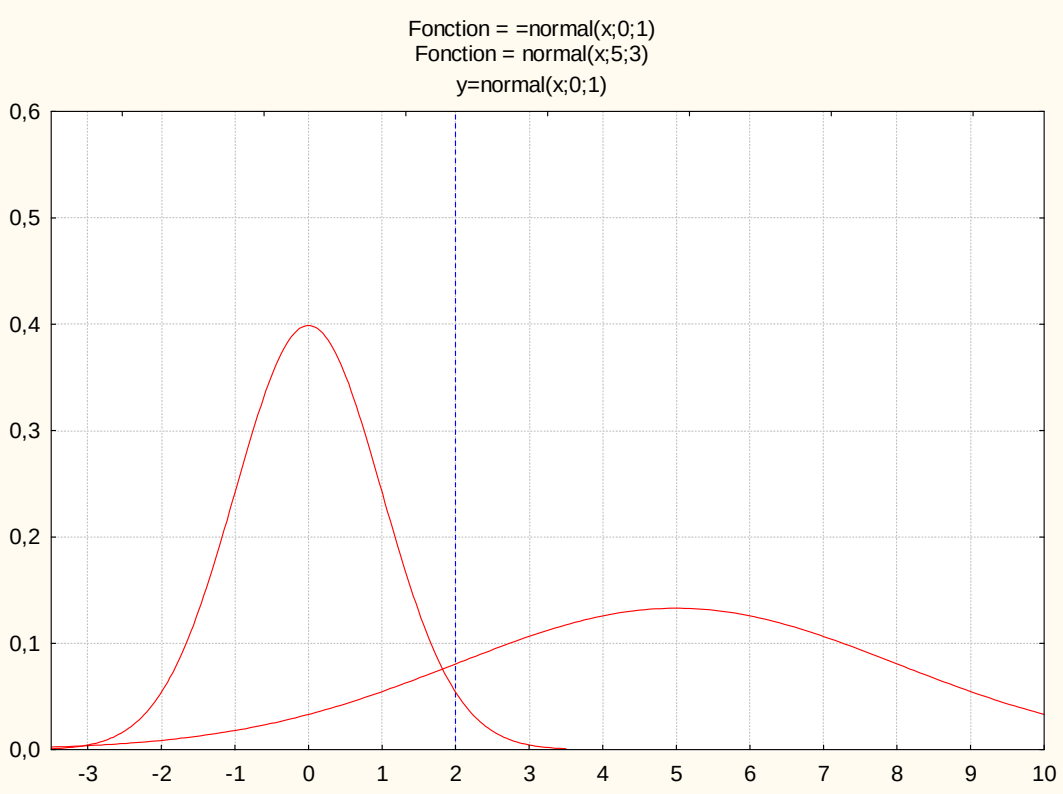
Groupe	Matrice de Classification (Mini-Exemple) Lignes : classifications observées Colonnes : classifications prévues		
	% Correct	B p=,50000	R p=,50000
B	70,00000	7	3
R	80,00000	2	8
Total	75,00000	9	11

Observation	Classification d'observations Classif. incorrectes indiquées par *		
	Classif. Observée	1 p=,50000	2 p=,50000
1	B	B	R
2	B	B	R
3	B	B	R
4	B	B	R
5	B	B	R
6	B	B	R
7	B	B	R
* 8	B	R	B
* 9	B	R	B
* 10	B	R	B
* 11	R	B	R
12	R	R	B
* 13	R	B	R
14	R	R	B
15	R	R	B
16	R	R	B
17	R	R	B
18	R	R	B
19	R	R	B
20	R	R	B

Observation	Dist. Mahalanobis Carrées aux Centroïdes de Groupe Classif. incorrectes indiquées par *		
	Classif. Observée	B p=,50000	R p=,50000
1	B	6,400358	16,00480
2	B	1,607185	7,53799
3	B	1,744768	2,48464
4	B	0,324909	2,70164
5	B	0,377043	4,39063
6	B	1,163147	1,38352
7	B	0,790164	4,40382
* 8	B	2,248567	0,03222
* 9	B	1,385890	0,92597
* 10	B	2,671635	0,93357
* 11	R	2,560061	3,18037
12	R	3,748901	2,33242
* 13	R	1,163147	1,38352
14	R	4,303982	0,57035
15	R	6,515202	1,38386
16	R	4,564730	0,43117
17	R	4,536029	0,52203
18	R	3,199096	3,09788
19	R	4,032491	1,77492
20	R	4,747819	2,60982

Les dispersions des valeurs peuvent être différentes selon les groupes.
Pour en tenir compte :

distance d'un point à un centre de groupe : **distance de Mahalanobis**.



$$d_1^2(x, m_1) = \left(\frac{x - m_1}{\sigma_1} \right)^2$$

$$d_2^2(x, m_2) = \left(\frac{x - m_2}{\sigma_2} \right)^2$$

Analyse Canonique

Considérer une variable abstraite, combinaison linéaire de X1 et X2 définie de façon que :

- la variance (dispersion) intra-groupes soit la plus petite possible
- la variance inter-groupes (variance calculée à partir des points moyens pondérés des groupes) soit la plus grande possible.

	Coefficients bruts des Variables Canoniques
Variable	Comp_1
VD1	-0,215016
VD2	-0,255245
Constte	4,386949
V.Propre	0,613476
Prop.Cum	1,000000

	Scores Canoniques non Centrés-Réduits	
Observation	Groupe	Comp_1
1	B	3,23141
2	B	1,99542
3	B	0,24893
4	B	0,79965
5	B	1,35037
6	B	0,07414
7	B	1,21581
8	B	-0,74569
9	B	-0,15474
10	B	-0,58477
11	R	0,20870
12	R	-0,47657
13	R	0,07414
14	R	-1,25618
15	R	-1,72644
16	R	-1,39074
17	R	-1,35051
18	R	-0,03405
19	R	-0,75956
20	R	-0,71933

Pour chaque observation, on calcule :
-0,215016 x VD1 – 0,255245 x VD2 + 4,386949

Exemple (Doise et al., Représentations sociales et analyses de données, ch. 10).

200 sujets, garçons et filles de 14 et 15 ans

Trois filières de scolarisation : Pratiques, Modernes, Classiques

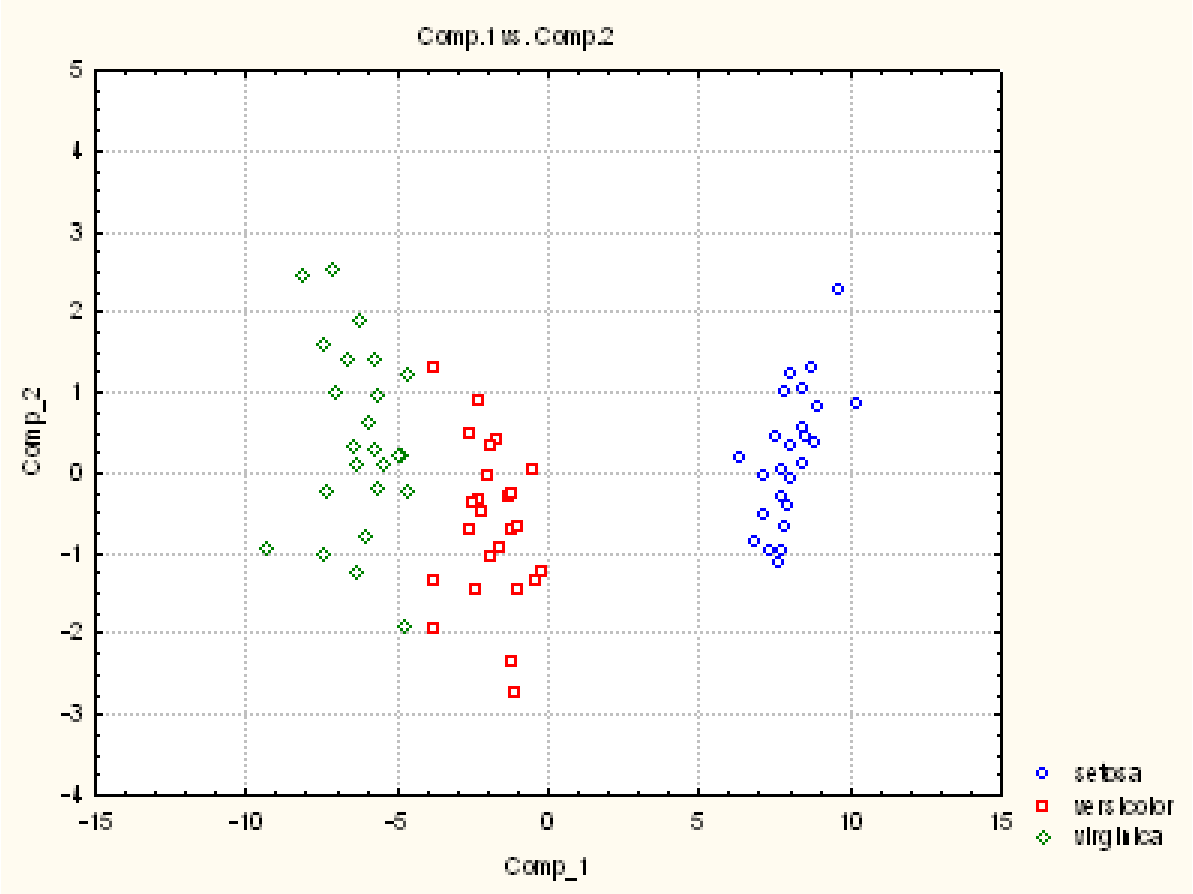
Variables indépendantes : sujets de conversation, sur des échelles en 5 points (jamais à très souvent). Ex. vie communautaire, motos, hygiène, argent, habillement, alcool, choix des amis, vie dans la nature, communisme, etc.

Matrice de confusion :

	N	Prédit		
Obs		P	M	C
P	67	44 (66%)	9	14
M	49	18	21 (43%)	10
C	84	12	8	64 (76%)

« La force de l'opposition entre les catégories extrêmes empêche ou tout au moins atténue l'apparition et par conséquent l'identification adéquate du profil de réponse des Modernes »

Les Iris de Fisher



Analyse de segmentation

Cf. polycopié p. 159

- Echantillon de n individus statistiques

- une variable dépendante numérique ou qualitative Y

- plusieurs variables numériques ou catégorielles X1, X2, ..., Xp.

Expliquer la variable Y à l’aide d’une ou plusieurs variables quantitatives ou qualitatives.

Créer des groupes d’individus ou d’observations homogènes.

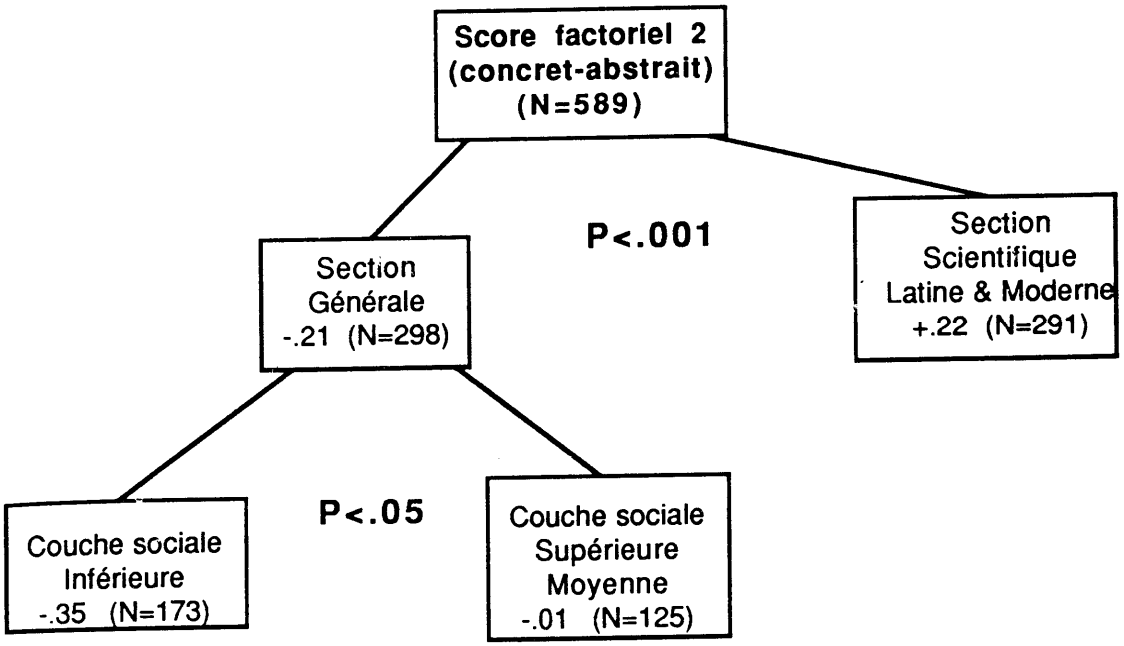
Résultat est fourni sous la forme d'un arbre de décision binaire du type suivant :

Exemple : Doise et al., Représentations sociales et analyses de données, chap 10

Thèmes de conversation pratiqués avec leurs parents par des élèves d'écoles secondaires genévoises. Seize thèmes : communisme, politique, art, vie dans la nature, vie communautaire, sorties, habillement, loisirs, argent, etc. Pour chaque thème : fréquence avec laquelle le thème est abordé à la maison.

ACP sur les thèmes. Premier facteur sans intérêt (effet de taille). Le deuxième facteur sert de variable dépendante. Il oppose des thèmes plus éloignés des préoccupations quotidiennes à des thèmes plus concrets.

Analyse de segmentation : 5 variables indépendantes : nationalité, sexe, niveau socio-économique, filière scolaire, collège fréquenté.



Première différentiation : filière générale v/s autres filières (banal selon Doise)

Pour les élèves de la filière la moins prestigieuse : la variable socio-économique produit un effet différenciateur.

Rappel : théorème de Huygens

L'inertie totale est la somme des inerties intra-groupes et de l'inertie des points moyens des groupes, pondérés par l'effectif des groupes.

$$I = \sum_{j=1}^{g} I_j + \sum_{j=1}^{g} n_j \left(\overline{y}_j - \overline{y}\right)^2$$

$$\begin{matrix}\text{Inertie} \\ \text{totale}\end{matrix} = \sum_{\text{les groupes}} \begin{matrix}\text{Inertie} \\ \text{dans}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Inertie des points moyens} \\ \text{pondérés par}\end{matrix} \text{les effectifs des groupes}$$

Exemple : 4 observations suivantes, réparties en deux groupes A et B :

Groupe	A	B	A	B
Y	1	2	3	4

$$\overline{y} = 2{,}5$$

$$\text{Inertie totale} = (1-2{,}5)^2 + (2-2{,}5)^2 + (3-2{,}5)^2 + (4-2{,}5)^2 = 5$$

$$I_A = (1-2)^2 + (3-2)^2 = 2$$

$$I_B = (2-3)^2 + (4-3)^2 = 2$$

$$I_{Inter} = 2 \times (2-2{,}5)^2 + 2 \times (3-2{,}5)^2 = 1$$

Algorithme de segmentation

1) Au départ : un seul segment contenant l'ensemble des individus.

2) Examen de toutes les variables explicatives et de toutes les divisions possibles (de la forme Xj< A et Xj > A si Xj est numérique, regroupement des modalités en deux sous-ensembles si Xj est catégorielle).

Pour chaque division, l'inertie inter-groupes est calculée.

3) La division choisie est celle qui maximise l'inertie inter-groupes.

4) On recommence la procédure dans chacun des deux groupes ainsi définis.

Critères d'arrêt :

On peut utiliser comme critères d’arrêt de l’algorithme de segmentation :

- La taille des groupes (classes) à découper

- Le rapport entre l'inertie intra et la variance totale

- Des tests statistiques (tests de Student de comparaison de moyennes, tests du Khi deux)

Determinants of Wages from the 1985 Current Population Survey

Variable names in order from left to right:

EDUCATION: Number of years of education.
SOUTH: Indicator variable for Southern Region (1=Person lives in South, 0=Person lives elsewhere).
SEX: Indicator variable for sex (1=Female, 0=Male).
EXPERIENCE: Number of years of work experience.
UNION: Indicator variable for union membership (1=Union member, 0=Not union member).
WAGE: Wage (dollars per hour).
AGE: Age (years).
RACE: Race (1=Other, 2=Hispanic, 3=White).
OCCUPATION: Occupational category (1=Management, 2=Sales, 3=Clerical, 4=Service, 5=Professional, 6=Other).
SECTOR: Sector (0=Other, 1=Manufacturing, 2=Construction).
MARR: Marital Status (0=Unmarried, 1=Married)

Diagramme de l'arbre 1 pour **Salaire**

Nb de noeuds non-terminaux : 7, Noeuds terminaux : 8

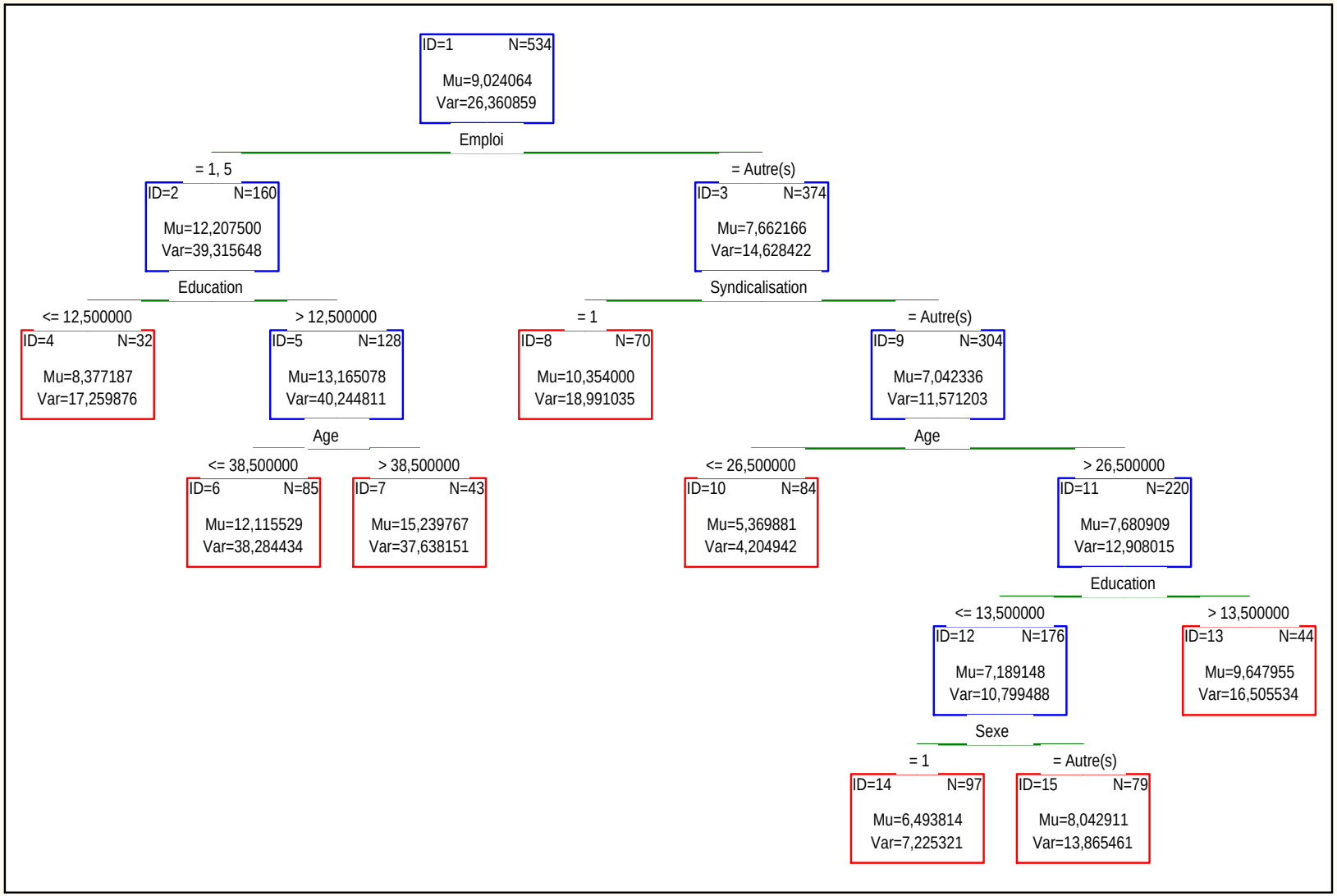
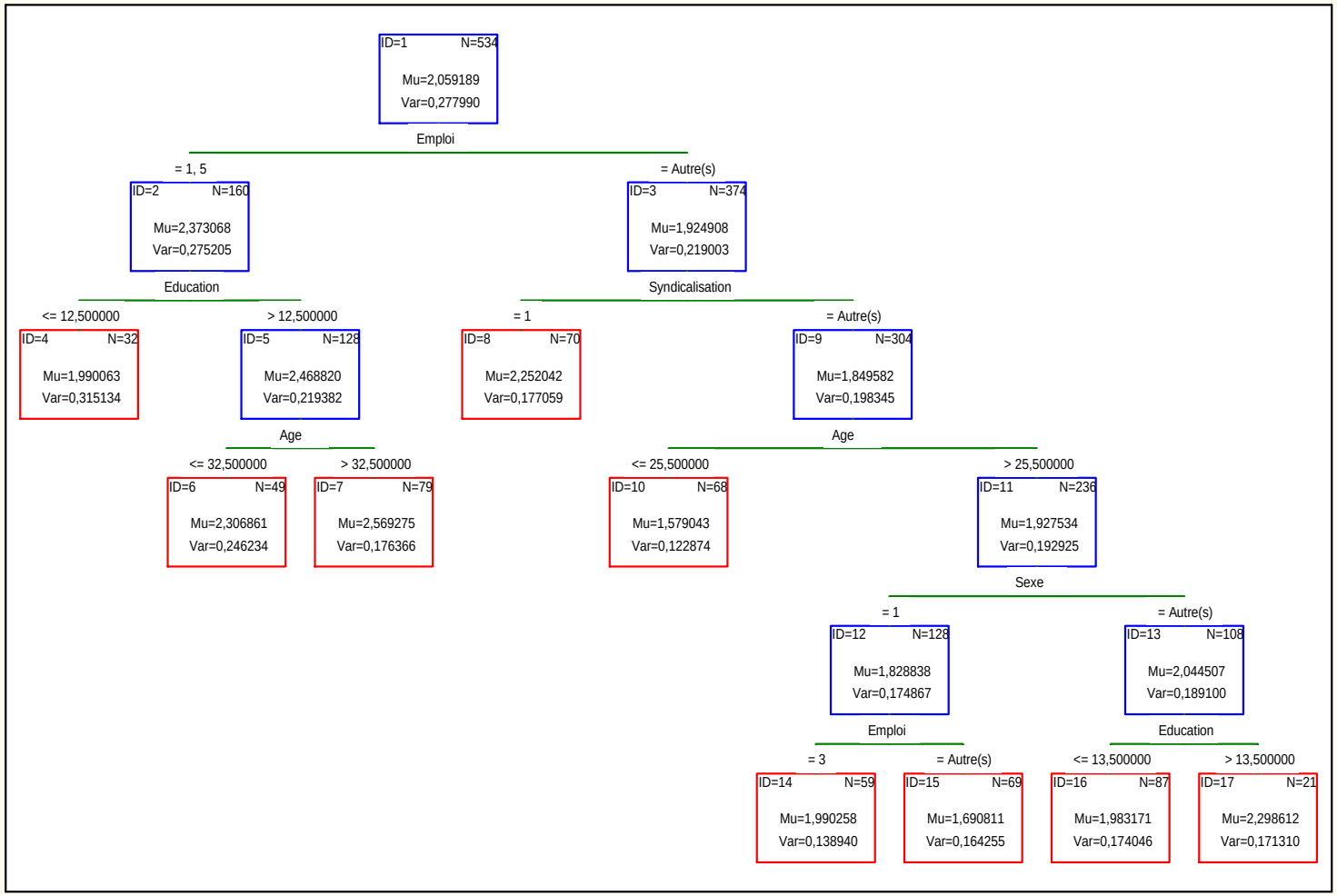


Diagramme de l'arbre 1 pour **Log-salaire**

Nb de noeuds non-terminaux : 8, Noeuds terminaux : 9



Analyse et régression PLS

PLS : partial least squares

On a observé sur un échantillon de n individus statistiques :

- d'une part, p variables indépendantes ou explicatives :
  X1, X2, ..., Xp

- d'autre part, q variables dépendantes, ou "à expliquer" :
  Y1, Y2, ..., Yq.

On souhaite établir entre les variables indépendantes et les variables explicatives q relations linéaires du type :

$$Y_1 = b_{10} + b_{11}X_1 + ... + b_{1p}X_p + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = b_{20} + b_{21}X_1 + ... + b_{2p}X_p + \varepsilon_2$$

...

$$Y_q = b_{q0} + b_{q1}X_1 + ... + b_{qp}X_p + \varepsilon_q$$

Un outil possible : la régression linéaire multiple, mais :

-Méthode très sensible aux colinéarités entre variables prédictives

- Inutilisable si le nombre d'observations est inférieur au nombre de prédicteurs

Une possibilité : faire d'abord une ACP sur les prédicteurs, puis une régression linéaire des variables dépendantes sur les variables principales : résultat peu lisible

Idée de la régression PLS : à partir des prédicteurs, on définit des composantes ou *variables latentes*, en tenant compte des variables à expliquer

Mini-exemple : 1 VD, 4 VI et 3 observations

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
s1	12	8	2	7	6
s2	10	2	12	5	7
s3	5	15	6	5	5

Variables centrées réduites :

Yc	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
0,8321	-0,0512	-0,9272	1,1547	0,0000
0,2774	-0,9734	1,0596	-0,5774	1,0000
-1,1094	1,0246	-0,1325	-0,5774	-1,0000

Première étape :

Première variable latente P1 :

	r(Y, Xi)	Poids Wi
X_1	-0,7247	-0,582
X_2	-0,1653	-0,133
X_3	0,7206	0,578
X_4	0,6934	0,556
Somme carrés	1,553	1
Racine carrée	1,246	

P1 = - 0,582 * Z1 - 0,133 * Z2 + 0,578 * Z3+ 0,556 * Z4.

Valeurs de P1 sur les 3 observations

	P_1
s1	0,8206
s2	0,6481
s3	-1,4687

Régression linéaire de Y sur P1

Y = 2,7640 P1 +9

Y, Y estimé et résidus :

	Y	Y estimé	Résidus
s1	12	11,2682	0,7318
s2	10	10,7915	-0,7915
s3	5	4,9404	0,0596

Coefficient de détermination : R2(Y, Y estimé) = 0,955

Deuxième étape : on recommence à partir des résidus de Y; nouvelle variable latente P2, etc