Révisions pour l'examen – correction

Pierre Cagne

14 décembre 2017

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(a) Démontrons que M est une rotation, c'est-à-dire que c'est une matrice orthogonale de déterminant 1. Pour montrer que M est orthogonale, il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}MM &= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 & 1/(2\sqrt{2}) - 1/(2\sqrt{2}) & -1/(2\sqrt{2}) + 1/(2\sqrt{2}) \\ 1/(2\sqrt{2}) - 1/(2\sqrt{2}) & (-1/\sqrt{2})^2 + 1/4 + 1/4 & (-1/\sqrt{2})^2 - 1/4 - 1/4 \\ -1/(2\sqrt{2}) + 1/(2\sqrt{2}) & (-1/\sqrt{2})^2 - 1/4 - 1/4 & (-1/\sqrt{2})^2 + 1/4 + 1/4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour le calcul du déterminant de M, on développe selon la première colonne pour trouver :

$$\det M = 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = 1$$

Ainsi, M est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

Pour déterminer son axe, il suffit d'en trouver un vecteur directeur, c'es-à-dire un vecteur $\vec{v}$ vérifiant $M\vec{v} = \vec{v}$. Si on note $(x\,, y\,, z)$ les coordonées de $\vec{v}$ dans la base canonique, il s'agit donc de résoudre le système

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$\left\{ \begin{aligned} -x - y/\sqrt{2} - z/\sqrt{2} &= 0 \\ x/\sqrt{2} - y/2 - z/2 &= 0 \\ x/\sqrt{2} - y/2 - z/2 &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} x &= 0 \\ x/\sqrt{2} - y/2 - z/2 &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} x &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned} \right.$$

Ainsi, l'axe de rotation est engendré par le vecteur $\vec{v}$ de coordonnée $(0\,,1\,,-1)$ par exemple. Une autre façon de décrire l'axe est de regarder l'équation cartésienne trouvée ci-dessus : l'axe de rotation est la droite intersection des plans d'équation $x=0$ et $y+z=0$.

Choisir une orientation pour cet axe, c'est choisir un des deux vecteurs directeurs **unitaires** possible pour l'axe. Autrement dit c'est choisir entre le vecteur directeur $\vec{\varepsilon}=\vec{v}/||\vec{v}||$ et $-\vec{\varepsilon}$. Une fois ce choix fait, on pourra exprimer l'angle de la rotation sans ambiguité (modulo 2π). Choisissons $\vec{\varepsilon}$. L'angle de la rotation est alors défini comme l'unique $\theta\in[0,2\pi[$ tel que, dans une base **orthonormée directe** complétant $\vec{\varepsilon}$, la matrice de rotation s'écrive

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Dans les faits, il faut donc commencer par compléter $\vec{\varepsilon}$ en une base orthonormée directe, c'est-à-dire trouver deux vecteurs unitaires $\vec{\epsilon}_1$ et $\vec{\epsilon}_2$ tels que

$$\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\epsilon}_1=0,\quad \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\epsilon}_2=0,\quad \vec{\epsilon}_1\cdot\vec{\epsilon}_2=0$$

et

$$\det(\vec{\varepsilon}\mid\vec{\epsilon}_1\mid\vec{\epsilon}_2)>0$$

Ici, clairement les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives dans la base canonique $(1\,,0\,,0)$ et $(0\,,1\,,1)$ sont orthogonaux entre eux et tous deux rthogonaux à $\vec{v}$ donc à $\vec{\varepsilon}$. De plus,

$$\det(\vec{v}\mid\vec{u}\mid\vec{w})=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+1=2>0$$

(Si l'on avait trouvé un déterminant négatif, on aurait juste eu à échanger $\vec{u}$ et $\vec{w}$ pour avoir un déterminant positif.) En revanche $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas unitaires (en fait ici $\vec{u}$ l'est mais c'est un peu un coup de chance) : il suffit de les normaliser pour arriver à nos fins. On pose donc

$$\vec{\epsilon}_1=\vec{u}/||\vec{u}||,\quad \vec{\epsilon}_2=\vec{w}/||\vec{w}||$$

On pose alors P la matrice de passage de la base $(\vec{\varepsilon},\vec{\epsilon}_1\,,\vec{\epsilon}_2)$ à la base canonique, c'est-à-dire

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

et on calcule la matrice de la rotation dans la base $(\vec{\varepsilon},\vec{\epsilon}_1\,,\vec{\epsilon}_2)$ grâce à la formule de changement de base. Pour simplifier le calcul, remarquons ici que P est une matrice orthogonale (ses colonnes sont unitaires et deux à deux orthogonales par définitions des $\vec{\varepsilon}_i$) donc P^{-1} n'est rien d'autre que la transposée de P :

$$
\begin{aligned}
P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Et ainsi l'angle est l'unique $\theta \in [0, 2\pi[$ dont le cosinus est 0 et le sinus 1, c'est-à-dire $\theta = \pi/2$.

Remarque : si on avait choisit l'autre orientation $-\vec{\varepsilon}$ pour l'axe, on aurait bien entendu trouvé $-\pi/2$ pour l'angle de la rotation. Rappelez-vous que cette histoire d'orientation détermine depuis quel "côté" on regarde la rotation dans le plan orthogonal à l'axe. Refaire les calculs avec ce choix d'orientation est un bon exercice d'entraînement au calcul matriciel.

(b) On considère maintenant la même matrice M mais comme représentant une transformation M_c de $\mathbb{C}^3$. On sait que M admet 1 comme unique valeur propre réelle (elle représente une rotation de $\mathbb{R}^3$, dont les seuls vecteurs propres sont ceux de l'axe). Son plynôme caractéristique, à coefficient réel et de degré 3, aura donc 1, λ et $\bar{\lambda}$ comme racines pour un certain complexe λ. Calculons le polynôme caractéristique (en développant selon la première colonne) et factorisons-le sur $\mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
\chi(X) &= \begin{vmatrix} -X & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 - X & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 - X \end{vmatrix} \\
&= -X\left(\left(\frac{1}{2} - X\right)^2 - 1/4\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - X\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - X\right)\right) \\
&= -X(X^2 - X) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - X\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - X\right)\right) \\
&= -X^2(X - 1) + (1 - X) \\
&= (1 - X)(X^2 + 1) \\
&= (1 - X)(X - i)(X + i)
\end{aligned}
$$

Ainsi les valeurs propres de χ sont 1, i et $-i$.

Astuce : si vous n'arrivez pas à factoriser "naturellement", vous pouvez développer complètement le polynôme jusque dans sa forme canonique $\chi(X) = -X^3 + X^2 - X + 1$. On sait d'autre part qu'il doit aussi s'écrire $\chi(X) = (1 - X)(X - a - ib)(X - a + ib)$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$. Il suffit alors de procéder par identification en développant : $\chi(X) = -X^3 + (1 + 2a)X^2 - (2a + a^2 + b^2)X + (a^2 + b^2)$. On trouve $a = 0$ par identification des termes en X^2, puis donc que $b^2 = 1$ (choisir $b = 1$ ou $b = -1$ revient au même).

Ainsi M_c a 3 valeurs propres complexes distinctes et est donc diagonalisable (sur $\mathbb{C}$). Trouver une base de vecteurs propres de M_c se fait selon la recette habituelle : on cherche à résoudre les systèmes associés aux 3 valeurs propres, c'est-à-dire

$$(M - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad (M - iI_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad (M + iI_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Remarquons qu'on a déjà une solution du premier système : c'est le vecteur $\vec{v}$ de la question précédente de coordonnées $(0\,,1\,,-1)$. On résoud rapidement les deux autres systèmes pour trouver deux autes vecteurs propres, par exemple $(i\sqrt{2}\,,1\,,1)$ pour la valeur propre i et $(-i\sqrt{2}\,,1\,,1)$ pour la valeur propre $-i$.

Remarque : cet exercice n'est pas très facile, surtout dans le temps imparti. Pas de panique donc s'il vous semble dur !