Partiel – Correction

51DE14CH – Soutien mathématique pour les chimistes

19 octobre 2017

Exercice 1.

1. Le plan Π est un plan affine dont la direction est le plan vectoriel π d'équation

$$-2x + y - z = 0$$

Géométriquement Π est le plan parallèle à π et passant par le point $(0\,,0\,,-3)$. Ainsi le vecteur directeur d'une droite orthogonal à Π est la même chose qu'un vecteur non nul orthogonal à π. On peut choisir le vecteur $\overrightarrow{d}$ de coordonnées

$$\overrightarrow{d} : \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. En effet, un vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées $(x\,,y\,,z)$ dans la base canonique appartient à π si et seulement si $-2x + y - z = 0$ (par définition), c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{w} = 0$, autrement dit si et seulement si $\overrightarrow{w}$ orthogonal à $\overrightarrow{d}$.

Remarque. À ne pas mettre sur une copie, mais on *lit* le vecteur $\overrightarrow{d}$ directement dans les coefficients de l'équation cartésienne du plan π (ou Π).

2. La droite Δ est définie comme l'ensemble des vecteurs s'écrivant $A+\lambda\overrightarrow{d}$ pour un réel λ. Il suffit de réécrire cette affirmation coordonnées par coordonnées pour obtenir l'équation paramétrique de Δ :

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

3. Notons $(x_H\,,y_H\,,z_H)$ les coordonnées de H dans la base canonique. Comme $H \in \Delta$, ces coordonnées satisfont à l'équation paramétrique qu'on a trouvée précédemment : il existe $\lambda_H \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_H = 1 - 2\lambda_H \\ y_H = 2 + \lambda_H \\ z_H = 3 - \lambda_H \end{cases} \tag{$\star$}$$

Comme H appartient également à Π, ces coordonnées doivent satisfaire à l'équation cartésienne de Π : $-2x_H+y_H-z_H = 3$. En substituant l'expression en fonction de λ_H dans cette équation, on trouve :

$$-2 + 4\lambda_H + 2 + \lambda_H - 3 + \lambda_H = 3$$

c'est-à-dire $\lambda_H = 1$. On peut alors calculer les coordonnées de H grâce à ($\star$) :

$$H : \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Par définition, la distance du point A au plan Π est la distance séparant A de son projeté orthogonal sur Π. Ce projeté orthogonal est le point d'intersection de Π avec la droite perpendiculaire à Π et passant par A. Or on connait cette droite, c'est Δ, et ce point d'intersection, c'est H. Ainsi la distance de A à Π est
$$\|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(x_A - x_H)^2 + (y_A - y_H)^2 + (z_A - z_H)^2} = \sqrt{6}$$

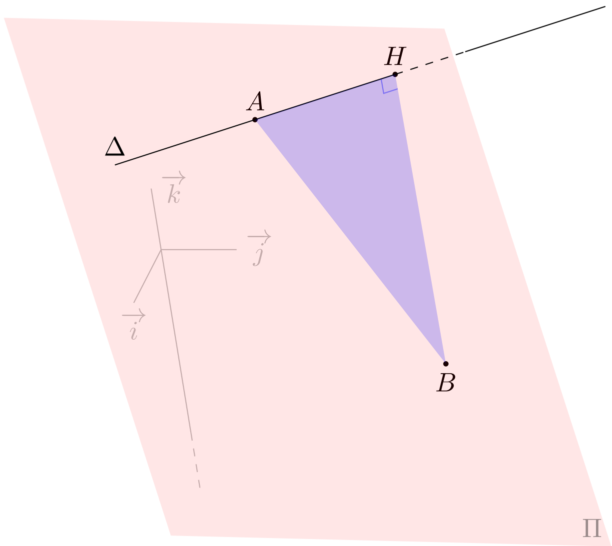
5. Calculons $-2x_B + y_B - z_B = -2 + 4 + 1 = 3$. Les coordonnées de B satisfont à l'équation du plan Π, donc $B \in \Pi$.

   On a accès à l'angle θ formé par $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ par la formule suivante :

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AH}\|\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$$

   L'angle cherché est donc $\theta = \arccos(\sqrt{3/10})$.

6.



Le triangle ABH est rectangle en H, donc son aire est la moitié du produit de ses côtés de l'angle droit :

$$\text{aire}(ABH) = \frac{\|\overrightarrow{AH}\|\|\overrightarrow{BH}\|}{2} = \sqrt{21}$$

Exercice 2.

1. On développe selon la dernière colonne et on trouve :

$$\det \mathcal{A} = 1 \times (-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}) = -1$$

2. Remarquons tout de suite que $\mathcal{A}$ est symétrique, donc sa tranposée est elle-même. On en est donc réduit à calculer $\mathcal{A}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 + 3/4 & -\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 & 3/4 + 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire $\mathcal{A}^2 = I_3$.

3. La matrice $\mathcal{A}$ représente une isométrie indirecte (sa transposée est son inverse et son determinant est -1). On peut même être plus précis : c'est la composée de la rotation d'axe dirigé par $\overrightarrow{k}$ et d'angle $\pi/3$ et de la symmétrie orthogonale relativement au plan engendré par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k}$. En effet,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) & 0 \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On cherche à déterminer l'ensemble des $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant :

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire ceux satisfaisant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = x \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = y \\ z = z \end{cases}$$

La dernière équation n'a pas d'intérêt et en manipulant le deux premières, on se rend compte qu'elle sont multiple l'une de l'autre (plus précisément, la deuxième ligne s'obtient en multipliant la première par $\sqrt{3}$). Ainsi une équation cartésienne du lieu géométrique cherché est :

$$x + \sqrt{3}y = 0$$