Entraînement : changements de bases

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer la matrice de f dans la base (e_1, e_2).

Exercice 2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie dans la base canonique par

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z) \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

1) Vérifier que f est un endomorphisme.
2) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique.
Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 0, 2)$, $\quad v_2 = (1, 1, 2)$, $\quad v_3 = (2, 1, 5)$.
3) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4) Si $v \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur dont la matrice colonne dans la base canonique est V et dont la matrice colonne dans la base (v_1, v_2, v_3) est W, quelle relation relie V et W ?
5) Calculer la matrice B de f dans la base (v_1, v_2, v_3). Quelle relation relie les matrices A et B ?

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x-y, z)$. Soit B_1 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B_2 celle de $\mathbb{R}^2$. On pose $B_3 = ((1, 0, -1), (4, 0, 3), (1, 1, 0))$ et $B_4 = ((1, 2), (-1, 1))$.

1. Montrer que B_3 est une base de $\mathbb{R}^3$ et B_4 une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les matrices de changement de base de B_1 vers B_3, de B_3 vers B_1, de B_2 vers B_4, de B_4 vers B_2.
3. Déterminer la matrice de f dans les bases B_1 et B_2.
4. Déterminer la matrice de f dans les bases B_3 et B_4.

Exercice 4. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z).$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2. Vérifier que $A^2 = 2A$.
3. Montrer que si $v \in \mathrm{Im}(f)$, alors $f(v) = 2v$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
5. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. Écrire la matrice de f dans la concaténation de ces deux bases.