Devoir Maison – Correction

51DE14CH – Soutien mathématiques pour les chimistes

22 novembre 2017

Exercice 1. (a) Soit A une matrice ayant 0 comme valeur propre. Les valeurs propres d'une matrice A étant les racines du polynôme $\det(A - XI_n)$, la valeur 0 annule ce polynôme : ainsi $\det(A) = \det(A - 0 \cdot I_n) = 0$. Ainsi, A n'est pas inversible.

(b) Une matrice réelle peut tout à fait être inversible sans être diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Elle peut même ne pas avoir de valeurs propres du tout ! Pour cela, il suffit de trouver une matrice inversible qui n'envoie aucun vecteur sur un multiple de lui-même : par exemple une matrice de rotation pour un angle $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$. En effet, considérons la matrice de rotation d'angle $\pi/2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $\det(A - XI_n) = X^2 + 1$ qui n'a pas de racines réelles. Pourtant la matrice A est inversible (son inverse est la matrice de rotation d'angle $-\pi/2$).

On pourrait opposer que l'exemple précédent, à défaut d'être diagonalisable sur $\mathbb{R}$, l'est sur $\mathbb{C}$ car elle a deux valeurs propres complexes distinctes (à savoir i et $-i$). Voici donc un autre exemple : considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A est clairement inversible, son déterminant étant 1. Supposons qu'elle soit diagonalisable : il existe alors P inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Le polynôme caractéristique de A est $\det(A - XI_n) = (1 - X)^2$, dont l'unique racine est 1. Ainsi $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$. On obtient donc $A = PI_nP^{-1} = I_n$, ce qui n'est clairement pas le cas. Donc A ne peut être diagonalisale, ni sur $\mathbb{R}$, ni sur $\mathbb{C}$.

(c) On peut directement reprendre le deuxième exemple ci-dessus. On a montré que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas daigonalisable. Pourtant elle admet 1 comme valeur propre réelle.

(d) La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & \mathrm{e}^{17} \\ -6 & 2 & \pi \\ \mathrm{e}^{17} & \pi & 3 \end{pmatrix}$$

est symétrique à coefficients réels. Un théorème du cours assure alors qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (a) Soit $n \geq 0$. Il suffit d'écrire u_{n+2} et u_{n+1} en fonction de u_{n+1} et u_n :

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_{n+1} = u_{n+1} + 0 \times u_n \end{cases}$$

Puis de mettre ce système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

(b) Le polynôme caractéristique de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est donné par $\det(A - XI_n) = X(X-1) - 1 = X^2 - X - 1$ dont les racines sont

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La matrice A, carrée de taille 2, a ainsi deux valeurs propres distinctes, φ et $\bar{\varphi}$. Elle est donc diagonalisable. Afin de trouver une base de vecteurs propres, il s'agit de trouver $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ tels que

$$A\vec{v}_1 = \varphi\vec{v}_1 \quad \text{et} \quad A\vec{v}_2 = \bar{\varphi}\vec{v}_2$$

On résoud donc

$$\begin{cases} (1-\varphi)x_1 + y_1 = 0 \\ x_1 - \varphi y_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi(1-\varphi)x_1 + \varphi y_1 = 0 \\ x_1 - \varphi y_1 = 0 \end{cases}$$

On remarque que $\varphi(1-\varphi) = \varphi - \varphi^2 = -1$ car φ racine de $X^2 - X - 1$. Donc le système est équivalent à la seule équation $x_1 - \varphi y_1 = 0$ et $\vec{v}_1 = (\varphi, 1)$ convient. On peut faire exactement le même raisonnement avec $\bar{\varphi}$ pour résoudre le système

$$\begin{cases} (1-\bar{\varphi})x_2 + y_2 = 0 \\ x_2 - \bar{\varphi} y_2 = 0 \end{cases}$$

pour trouver que $\vec{v}_2 = (\bar{\varphi}, 1)$ convient. Une base de vecteurs propres est ainsi donnée par $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

(c) On sait que la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base canonique. Appelons cette dernière Q : elle s'obtient en écrivant en colonne les coordonnés des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique, i.e.

$$Q = \begin{pmatrix} \varphi & \bar{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule alors $P = Q^{-1}$ par la méthode de la comatrice :

$$Q^{-1} = \frac{1}{\varphi - \bar{\varphi}} {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\bar{\varphi} & \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{\varphi} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}$$

(d) Notons f pour l'application linéaire représentée par A dans la base canonique. Par les questions (a) et (b), on sait que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \bar{\varphi} \end{pmatrix}$$

La matrice A s'obtient alors comme conjuguée de cette matrice diagonale par la matrice de passage P :

$$A = P^{-1}DP$$

Remarque. On rappelle qu'on peut retrouver facilement cette relation comme suit. Si X et X' représentent les coordonées d'un vecteur $\vec{v}$ respectivement dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$, alors $X' = PX$ par définition de la matrice de passage P. Les coordonnées de $f(\vec{v})$ dans la base canonique sont AX et dans la base $\mathcal{B}$ sont DX', et donc $DX' = PAX$. On finit par trouver que pour tout vecteur colonne X,

$$P^{-1}DPX = AX$$

Cela implique alors que $P^{-1}DP = A$, en appliquant successivement avec $X = (1, 0, \dots, 0)$, $X = (0, 1, \dots, 0)$, etc. jusque $X = (0, 0, \dots, 1)$.

On peut alors montrer par récurrence sur $k \geq 0$ que $A^k = P^{-1}D^kP$. L'initialisation est triviale : $A^0 = I_n = P^{-1}P = P^{-1}D^0P$. L'hérédité s'appuie sur la relation qu'on vient de trouver entre A, P et D : si on suppose $A^k = P^{-1}D^kP$ pour un certain $k \geq 0$, alors

$$A^{k+1} = A \times A^k = P^{-1}DPP^{-1}D^kP = P^{-1}DD^kP = P^{-1}D^{k+1}P$$

On a donc, par principe de récurrence, pour tout $k \geq 0$,

$$A^k = \begin{pmatrix} \varphi & \bar{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^k & 0 \\ 0 & \bar{\varphi}^k \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{\varphi} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}$$

Donc :

$$A^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi & \bar{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^k & -\bar{\varphi}\varphi^k \\ -\bar{\varphi}^k & \bar{\varphi}^k\varphi \end{pmatrix}$$

Ce qui donne, pour $k \geq 1$, et après avoir remarqué la simplification $\varphi\bar{\varphi} = -1$:

$$A^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{k+1} - \bar{\varphi}^{k+1} & \varphi^k - \bar{\varphi}^k \\ \varphi^k - \bar{\varphi}^k & \varphi^{k-1} - \bar{\varphi}^{k-1} \end{pmatrix}$$

(e) La formule de la question (a) permet de montrer rapidement par récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

En effet, l'initialisation est triviale puisque la propriété pour $n = 0$ se réduit à vérifier :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

L'hérédité s'appuie sur l'égalité de la question (a) : si pour un certain $n \geq 0$, on a

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

alors on peut calculer

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A \times A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Le principe de récurrence s'applique donc et on conclut que pour tout $n \geq 0$ on a

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

et donc en particulier, en rappelant que $u_1 = u_0 = 1$,

$$u_n = \frac{\varphi^n - \bar{\varphi}^n + \varphi^{n-1} - \bar{\varphi}^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

Cette réponse est satisfaisante mais on peut la rendre plus élégante en se rappelant que $1 + \varphi = \varphi^2$ et $1 + \bar{\varphi} = \bar{\varphi}^2$. Ainsi,

$$\varphi^n - \bar{\varphi}^n + \varphi^{n-1} - \bar{\varphi}^{n-1} = \varphi^{n-1}(1+\varphi) - \bar{\varphi}^{n-1}(1+\bar{\varphi}) = \varphi^{n+1} - \bar{\varphi}^{n+1}$$

On obtient donc la formule un peu plus sympathique :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \frac{\varphi^{n+1} - \bar{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Exercice 3. (a) On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \det(A - XI_n) &= (1-X)\left(\left(\frac{1}{2} - X\right)\left(-\frac{1}{2} - X\right) - \frac{3}{4}\right) \\ &= -(1-X)(1-X^2) \\ &= -(1-X)^2(1+X) \end{aligned}$$

Ses racines sont 1 et -1. Ce sont donc les valeurs propres de A.

(b) A est symétrique réelle donc est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ par un un théorème du cours. Cela signifie qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs propres de A. Comme chacun de ces vecteurs de la base sont soit dans E_1 soit dans E_{-1}, on a en particulier :

$$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_{-1}$$

(c) La matrice $A + I_3$ s'exprime comme

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice est par définition la dimension de l'image de l'application linéaire associée. C'est-à-dire la dimension de l'espace engendré par $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ les vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique sont les colonnes de de $A + I_3$. On remarque alors que $\vec{v}_1 = -\sqrt{3}\vec{v}_2$, donc v_1 et v_2 sont liés. En revanche v_3 est indépendant de v_1 et v_2. Donc $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ est de dimension 2. Autrement dit, la matrice $A + I_3$ a rang 2.

On en déduit alors la dimension de $E_{-1} = \ker(A + I_3)$ par le théorème du rang :

$$\dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rg} A = 3 - 2 = 1$$

On a alors également la dimension de E_1, car c'est un supplémentaire de E_{-1} d'après la question (b) :

$$\dim E_1 = \dim \mathbb{R}^3 - \dim E_{-1} = 3 - 1 = 2$$

(d) Le théorème utilisé en question (b) pour affirmer que la matrice symétrique A est diagonalisable est en fait plus fort que cela : il affirme qu'elle est diagonalisable en base orthogonale. Autrement dit, non seulement il existe une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, mais de plus les $\vec{u}_i$ peuvent être choisis deux à deux orthogonaux. D'après les dimensions trouvées à la question (c), on sait que deux des vecteurs de la base seront associés à la valeur propre 1 et un à la valeur -1. Quitte à réordonner la base, on peut dire que c'est $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ qui forment une base du plan E_1 et que $\vec{u}_3$ est un vecteur directeur de la droite vectorielle E_{-1}.

Ainsi, si $\vec{v} \in E_1$ et $\vec{w} \in E_{-1}$, $\vec{v}$ s'écrit $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$ et $\vec{w}$ s'écrit $\gamma\vec{u}_3$ pour certains $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$. On a alors :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \alpha\gamma\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 + \beta\gamma\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$$

On en déduit que tous les vecteurs de E_1 sont orthogonaux au vecteurs de E_{-1}. On peut même anticiper un peu sur la question suivante : comme E_{-1} est une droite vectorielle, l'ensemble des vecteurs qui lui sont orthogonaux forment un plan vectoriel ; or on vient de montrer que E_1 faisait parti de ce plan ; comme E_1 est lui-même un plan vectoriel, c'est donc que E_1 est exactement formé des vecteurs orthogonaux à la droite E_{-1}.

(e) Il s'agit ici de trouver un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (x, y, z) dans la base canonique tel que

$$(A + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui se réécrit comme le système

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

Un tel vecteur est donné par $(1, \sqrt{3}, 0)$. (Bien entendu, ce n'est pas le seul et tout vecteur colinéaire convenait également). On peut alors invoquer la caractérisation de E_1 trouvée ci-dessus : E_1 est exactement l'ensemble des vecteurs orthogonaux à la droite E_{-1}, i.e. orthogonaux au vecteur $\vec{v}$ qu'on vient de trouver. On a donc

$$E_1 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\}$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique vérifient l'équation : $x + \sqrt{3}y = 0$. C'est l'équation cartésienne de E_1 cherchée.