Question de cours 1. Soient f, g deux fonctions définies aux voisinages de $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$f \sim_a g \iff g \sim_a f.$$

Question de cours 2. Justifier la terminologie « négligeable » dans l'expression $f = o_a(g)$.

Question de cours 3. Justifier la terminologie « équivalent » dans l'expression $f \sim_a g$.

Exercice 1. (i) Montrer que pour tout $x > 1$, on a $0 < \ln x < 2\sqrt{x}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty}(\ln x/x)$.

(ii) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}$ pour tout $n \geq 1$. Quelles relations en tirer entre les fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$?

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1, \qquad f'(0) = f'(1) = 0.$$

Montrer que f admet un point fixe dans $]0,1[$. (Indice : utiliser le TVI.)

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

(i) Déterminer une fonction $t_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le graphe est la tangente à la courbe de f en a.

(ii) Montrer que

$$f(x) = t_a(x) + \underset{x\to a}{o}(x-a).$$

(iii) Application : montrer que la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ (définie sur $\mathbb{R}^*$) est prolongeable par continuité en 0. Par quelle valeur ?

Exercice 4 (*)**.** Le but de l'exercice est de montrer la formule de Taylor-Young pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infiniment dérivable en a : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

(i) Pour une fonction R dérivable au voisinage a, montrer que

$$\mathrm{R}'(x) = \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n-1}\right) \implies \mathrm{R}(x) = \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

(ii) Montrer la formule de Taylor-Young par récurrence. (On fera bien attention de prendre comme hypothèse de récurrence une propriété commençant par : « **toute** fonction g infiniment dérivable en a [...] ».)

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{+\infty} f'$ existent et sont réelles. Montrer que $\lim_{+\infty} f' = 0$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq \alpha\, |x-y|^2.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 7. Le but de cet exercice est de trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^n 1/k$ en $+\infty$.

(i) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

(On pourra étudier $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$.)

(ii) En déduire que la suite u définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ pour tout $n \geq 1$ est décroissante et minorée par 0.

(iii) En déduire l'existence d'un réel γ vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1).$$

(iv) Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ en $+\infty$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0) = 0, \qquad f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \; \forall x \neq 0.$$

(i) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(ii) Donner une expression de f'.

(iii) Montrer que f' n'est pas continue.

Exercice 9. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$, et $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$. On pose également :

$$\forall x \in [a,b],\; \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(i) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

(ii) Étudier les variations de φ et donner son minimum.

(iii) Soit u la suite définie par :

$$u_0 = b, \qquad u_{n+1} = \varphi(u_n),\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notons T_n la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u_n. Quel est le point d'intersection entre T_n et l'axe des abscisses ?

(iv) Montrer que u est décroissante et converge vers α.