Question de cours 1. Montrer la formule de dérivation d'un produit.

Question de cours 2. Si $\lim_a f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} g = -\infty$, alors $\lim_a g \circ f = -\infty$.

Question de cours 3. Montrer la formule de dérivation de $1/f$ (pour une fonction f ne s'annulant pas).

Exercice 1.

(i) Montrer que pour tout $x > 1$,
$$0 < \ln x < 2\sqrt{x}.$$
(Indice : écrire $\ln x$ comme une intégrale.)

(ii) En déduire que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$
puis que $\lim_{x\to+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

(iii) Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x}.$$
Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(0) = 0, \qquad f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \forall x \neq 0.$$

(i) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(ii) Donner une expression de f'.

(iii) Montrer que f' n'est pas continue.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $t > 0$.

(i) Montrer que si f admet une limite en $+\infty$ alors f est constante.

(ii) Montrer que si f est monotone, alors f est constante.

(iii) On suppose que $f \restriction [0,t]$ est continue. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

(i) Montrer que toute fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ admet un point fixe. (Indice : utiliser le TVI.)

(ii) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction tel qu'il existe $0 < k < 1$ satisfaisant
$$\forall x, y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|.$$
Montrer que f est continue, puis qu'elle admet un unique point fixe p.

(iii) Soit u la suite définie par
$$u_0 \in [0,1], \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - p| \leq k^n$. En déduire la limite de la suite u.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme suit :

$$f^+ : x \mapsto \sup(f(x), 0), \qquad f^- : x \mapsto \sup(-f(x), 0).$$

(i) Tracer rapidement les courbes de $\sin^+$ et $\sin^-$.

(ii) Montrer les égalités suivantes :

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

(iii) Montrer que f est continue si et seulement si f^+ et f^- le sont.

Exercice 6 (*)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|^2.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 7 (*)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1, \qquad f'(0) = f'(1) = 0.$$

Montrer que f admet un point fixe dans $]0,1[$. (Indice : utiliser le TVI.)

Exercice 8. Soient deux réels $a < b$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, dérivables sur $]a,b[$ et vérifiant

$$\forall x \in\ ]a,b[,\ \left|f'(x)\right| \leq g'(x).$$

Montrer que $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Exercice 9. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x \cos x.$$

On donnera une expression de la forme $r^n \mathrm{e}^x \cos(x + n\phi)$.