Convention : une suite est *convergente* si elle admet une limite (finie ou infinie !). Elle est *divergente* sinon. Par exemple : $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, mais $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Question de cours 1. Soit u et v deux suites convergeant respectivement vers k et ℓ. Montrer que $u+v$ converge vers $k+\ell$.

Question de cours 2. Montrer qu'une suite croissante majorée converge vers une limite finie.

Question de cours 3. Montrer que deux suites adjacentes convergent vers la même limite finie.

Exercice 1. Soit H la suite définie par récurrence comme suit :

$$\mathrm{H}_0 = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{H}_n + \frac{1}{n+1}.$$

(i) Étudier les variations de H.

(ii) Montrer que pour tout $n > 0$, on a $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geq \frac{1}{2}$.

(iii) En déduire que H converge vers $+\infty$.

Exercice 2. (i) Montrer que pour tout $n > 0$, on a

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$$

(ii) Soit u la suite définie par récurrence comme suit :

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Montrer que u admet une limite et la calculer.

(iii) Soit v la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$. Montrer que v admet une limite et la calculer.

Exercice 3. Soit u la suite définie par récurrence comme suit :

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^n}{n+1} \ (\forall n \in \mathbb{N}).$$

(i) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire la convergence de u vers une limite finie.

(ii) Pour tout $n \geq 1$, posons $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in [0,1], f(x) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}.$$

Posons également $g : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$|f_n(x) - g(x)| \leq x^n.$$

(iii) Calculer $\int_0^1 g$ et $\int_0^1 f$.

(iv) En déduire que u converge vers $\ln 2$.

Exercice 4. Soient u et v les suites réelles définies par récurrence comme suit :

$$0 < u_0 < v_0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{{v_n}^2}{u_n + v_n} \end{cases}.$$

(i) Montrer que les suites u et v sont bien définies et strictement positives.

(ii) Montrer que u et v convergent chacune vers une limite finie. (Indice : on pourra s'intéresser aux variations de u et v.)

(iii) Notons ℓ_u et ℓ_v les limites respectives de u et v. Trouver une relation entre ℓ_u et ℓ_v.

(iv) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire une relation d'ordre entre ℓ_u et ℓ_v.

(v) Conclure.

Exercice 5. Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n+1 \text{ radicaux}}$$

(i) Écrire u comme une suite définie par récurrence.

(ii) Étudier les variations de u. (Indice : on pourra considérer la fonction $h\colon x \mapsto \sqrt{2+x} - x$.)

(iii) Majorer la suite u.

(iv) Étudier la convergence de u.

Exercice 6. Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

(i) Montrer que u est monotone. En déduire sa convergence vers une limite finie.

(ii) Soit v la suite définie pour tout $n \geq 2$ par

$$v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Montrer que v est géométrique et en déduire une expression de v_n en fonction de n. (On prendra garde au fait que v n'est définie qu'à partir du rang 2.)

(iii) En déduire une expression de u_n en fonction de n, et déterminer la limite du u.

Exercice 7. Soient a et b les suites définies par :

$$0 < a_0 < b_0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < a_n \leq b_n$.

(ii) Montrer que b converge vers une limite finie.

(iii) En déduire que a converge vers la même limite.

Exercice 8. Soit u une suite réelle strictement positive. On suppose que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(i) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$.

(ii) Montrer alors que pour tout $n > n_0$, on a

$$0 < u_n < u_{n_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

(iii) En déduire que u converge vers une limite finie qu'on explicitera.

Exercice 9 $(*)$**.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient x et y les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\, x_n = \cos(n\alpha) \quad \text{et} \quad y_n = \sin(n\alpha).$$

Le but de l'exercice est de montrer, par l'absurde, que x et y divergent.

(i) Exprimer x et y comme des suites multuellement récursives.

(ii) Supposons par l'absurde que x converge vers une limite k.

a. Justifiez que k est finie.

b. Montrer que y converge vers une limite finie ℓ.

c. Exprimer k en fonction de ℓ et vice-versa. En déduire leurs valeurs.

d. Retrouver $k^2 + \ell^2$ par un autre procédé et conclure.

(iii) Montrer que y diverge. (On attend une idée maline et non une copie de la question précédente en inversant x et y.)

Exercice 10. Soit u une suite à valeurs entières (i.e. pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$) et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} > u_n$. Étudier la convergence de u.

Exercice 11. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction croissante ($a < b$ des réels). Soit u la suite réelle définie par

$$u_0 \in [a, b], \qquad \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n).$$

(i) Montrer que u est monotone. En déduire qu'elle converge vers un réel $\ell \in [a, b]$.

(ii) Montrer que si $u_0 = a$, alors u est croissante, et que si $u_0 = b$, alors u est décroissante.

(iii) Application : étudier la convergence de la suite v définie par

$$v_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\, v_{n+1} = \sin(v_n).$$