Question de cours 1. Si $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$, alors $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E}$.

Question de cours 2. Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

Question de cours 3. Si f est injective, l'image d'une famille libre est libre.

Question de cours 4. Si f est surjective, l'image d'une famille génératrice est génératrice.

Exercice 1. Soient E et F deux k-espaces vectoriels. Soient $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille quelconque de F.

(i) Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\varphi \colon \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varphi(e_i) = f_i$.

(ii) Montrer que l'application φ ainsi construite est injective si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre dans F.

(iii) Montrer que l'application φ ainsi construite est surjective si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice dans F.

Question bonus : montrer que choisir une base de E revient à choisir un isomorphisme $\mathrm{E} \to k^n$.

Exercice 2. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire entre espaces vectoriels de même dimension. Montrer que :

(i) si f est injective, alors c'est un isomorphisme,

(ii) si f est surjective, alors c'est un isomorphisme.

Exercice 3. Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

(i) Montrer que $\ker f \subseteq \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{im}\, g$.

(ii) Montrer que $\ker g \cap \mathrm{im} f = f(\ker(g \circ f))$.

(iii) On suppose dorénavant que f et g commutent, c'est-à-dire : $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker g$ et $\mathrm{im}\, g$ sont stables par f.

Exercice 4. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{\infty}$. On pose $\mathrm{D} \colon \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ l'application définie par $f \mapsto f'$.

(i) Montrer que D est une application linéaire.

(ii) Détermininer $\ker \mathrm{D}$ et $\mathrm{im}\, \mathrm{D}$.

(iii) Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$. Montrer que F est stable par D.

Exercice 5. On se place dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$. Soit $\vartheta \in \mathbb{R}$, on note $r_\vartheta \colon \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ l'application définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E},\ r_\vartheta(x, y) = (\cos(\vartheta)x - \sin(\vartheta)y, \sin(\vartheta)x + \cos(\vartheta)y).$$

(i) Montrer que r_ϑ est linéaire.

(ii) Déterminer son noyau. En déduire que r_ϑ est bijective.

(iii) Déterminer ${r_\vartheta}^{-1}$.

(iv) Décrire r_ϑ en termes géométriques. Justifiez. (Indice : écrire un élément de $\mathbb{R}^2$ comme $\lambda(\cos\tau, \sin\tau)$.)

Exercice 6. (*) Soit E un k-espace vectoriel de base $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$. On note $\mathrm{E}^\star$ l'ensemble des *formes linéaires* sur E, c'est-à-dire des applications linéaires $f : \mathrm{E} \to k$.

(i) Justifier brièvement que E^* est un k-espace vectoriel.

(ii) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, montrer que l'application $e_i^\star : \mathrm{E} \to k$ qui à un vecteur x associe sa i-ème coordonnée dans $\mathscr{E}$ est une forme linéaire.

(iii) Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, calculer $e_i^*(e_j)$.

(iv) Montrer que $\mathscr{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*. En déduire $\dim(\mathrm{E}^*)$.

Exercice 7. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Une *homothétie* est une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ tel qu'il existe un $\lambda \in k$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathrm{E}, f(x) = \lambda x.$$

(i) Montrer qu'une homothétie est une application linéaire. Pour toute droite vectorielle $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{E}$, déterminer $f(\mathrm{D})$.

(ii) Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application linéaire vérifiant $f(\mathrm{D}) = \mathrm{D}$ pour toute droite vectorielle $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{E}$.

  (a) Montrer que pour tout $a \in \mathrm{E}$, on peut trouver $\lambda_a \in k$ tel que $f(a) = \lambda_a a$.

  (b) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Comparer les $\lambda_{e_k}, k \geq 2$ avec λ_{e_1}. En déduire que f est une homothétie.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ des polynômes de degré $\leq n$. On pose

$$\mathrm{D} : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \ \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$$

l'opération de dérivation des polynômes.

(i) Montrer que D est une application linéaire.

(ii) Déterminer son noyau. En déduire la dimension de son image.

(iii) Retrouver le résultat précédent en calculant directement $\operatorname{im} \mathrm{D}$.

Exercice 9. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On rappelle la définition du produit scalaire : pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de E,

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

(i) Soit $u \in \mathrm{E}$. Montrer que $f_u : x \mapsto u \cdot x$ est une application linéaire $\mathrm{E} \to \mathbb{R}$.

(ii) En déduire que pour tout $u \in \mathrm{E}$, l'ensemble

$$u^\perp = \{x \in \mathrm{E} : u \cdot x = 0\}$$

des vecteurs orthogonaux à u est un sous-espace vectoriel de E.

(iii) Calculer la dimension de $u^\perp$. Puis, trouver un supplémentaire de $u^\perp$ dans E. (Prendre soin de traiter le cas $u = 0$ à part.)

Exercice 10. Soit E un k-espace vectoriel. On appelle *forme linéaire* toute application linéaire $\mathrm{E} \to k$.

(i) Soit f une forme linéaire non nulle.

  a. Soit $x_0 \notin \ker f$. Que vaut l'image de $(f(x)/f(x_0))x_0$ pour x quelconque ?

  b. Trouver un supplémentaire de $\ker f$ dans E.

  c. En déduire $\dim(\ker f)$.

(ii) Retrouver le résultat précédent par un autre procédé.