Question de cours 1. Si $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$, alors $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E}$.

Question de cours 2. Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

Question de cours 3. Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire et $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{E}$.

(i) Si $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre, alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

(ii) Si f est injective, l'image d'une famille libre est libre.

(iii) Si f est surjective, l'image d'une famille génératrice est génératrice.

Exercice 1. Un *isomorphisme* de E sur F est une application linéaire $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ telle qu'il existe une application linéaire $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ respectant :

$$f \circ g = \mathrm{id}_\mathrm{F}, \quad g \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}.$$

(i) Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si $\ker f = 0$ et $\mathrm{im}\, f = \mathrm{F}$.

(ii) Posons $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que f est un isomorphime si et seulement si $f(\mathscr{E}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

(iii) En déduire que s'il existe un isomorphisme $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$, alors $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$.

Question bonus : prouver la réciproque de la dernière question.

Exercice 2. Soient E et F deux k-espaces vectoriels. Soient $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille quelconque de F.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varphi(e_i) = f_i$.
2. Montrer que l'application φ ainsi construite est injective si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre dans F.
3. Montrer que l'application φ ainsi construite est surjective si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice dans F.

Question bonus : Soit E un k-espace vectoriel de dimension n dont on choisit une base $\mathscr{B}$. Expliciter, dans les termes de l'exercice, l'application $\mathrm{E} \to k^n$ qui associe à chaque vecteur de E ses coordonées dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 3. Soit $f : k^n \to k^n$ une application linéaire. On note f^m la composée :

$$\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ fois}}$$

On suppose qu'on a un entier $p > 0$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

(i) Montrer que pour tout $k < p$, $f^k \neq 0$.

(ii) Montrer qu'il existe $x_0 \in k^n$ tel que la famille

$$\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$$

est libre. (Indice : il faut en particulier $f^{p-1}(x_0) \neq 0$!).

(iii) Donner les coordonées dans la base $\mathscr{B}$ de chacune des images par f des vecteurs de $\mathscr{B}$.

Exercice 4. Soit E un k-espace vectoriel de base $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$. On note $\mathrm{E}^\star$ l'ensemble des *formes linéaires* sur E, c'est-à-dire des applications linéaires $f : \mathrm{E} \to k$.

(i) Justifier que E^* est un k-espace vectoriel.

(ii) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, montrer que l'application $e_i^\star : E \to k$ qui à un vecteur x associe sa i-ème coordonnée dans $\mathscr{E}$ est une forme linéaire.

(iii) Montrer que $\mathscr{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*. En déduire $\dim(E^*)$.

Exercice 5. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On rappelle la définition du produit scalaire : pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de E,

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

(i) Soit $u \in E$. Montrer que $f_u : x \mapsto u \cdot x$ est une application linéaire $E \to \mathbb{R}$.

(ii) En déduire que pour tout $u \in E$, l'ensemble

$$u^\perp = \{x \in E : u \cdot x = 0\}$$

des vecteurs orthogonaux à u est un sous-espace vectoriel de E.

(iii) On suppose dorénavant que $u \neq 0_E$. Trouver un supplémentaire de $u^\perp$. En déduire la dimension de $u^\perp$.

Exercice 6. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f : E \to E$ une application linéaire.

(i) Supposons pour cette question que $E = \mathbb{R}^2$ et $f : (x, y) \mapsto (y, 0)$. Montrer que l'on n'a pas

$$\ker f \oplus \operatorname{im} f = E.$$

(ii) E et f redeviennent quelconque. Montrer que pour tout $p \geq 0$,

$$\ker(f^p) \subseteq \ker(f^{p+1}), \quad \operatorname{im}(f^p) \supseteq \operatorname{im}(f^{p+1}).$$

(iii) Montrer qu'il existe un entier p_0 tel que $\ker(f^{p_0+1}) = \ker(f^{p_0})$. Montrer qu'alors $\ker(f^q) = \ker(f^{p_0})$ pour tout $q \geq p_0$.

(iv) En déduire que $E = \ker(f^{p_0}) \oplus \operatorname{im}(f^{p_0})$. (On rappelle que pour tout endomorphisme $g : E \to E$, on a $E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$ par le théorème du rang.)

Exercice 7. Soit E un k-espace vectoriel. On appelle *forme linéaire* toute application linéaire $E \to k$.

(i) Soit f une forme linéaire non nulle.

  (a) Soit $x_0 \notin \ker f$. Que vaut l'image de $(f(x)/f(x_0))x_0$ pour x quelconque ?

  (b) Trouver un supplémentaire de $\ker f$ dans E.

  (c) En déduire $\dim(\ker f)$.

(ii) Montrer que deux formes non nulles f et f' satisfont $\ker f = \ker f'$ si et seulement si l'une est multiple de l'autre.

Exercice 8. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$. On pose

$$D : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], \, P \mapsto P'$$

l'opération de dérivation des polynômes.

(i) Montrer que D est une application linéaire.

(ii) Déterminer son noyau et son image.

(iii) Que vaut : $\dim(\ker D) + \dim(\operatorname{im} D)$?

Question bonus : pouvait-t-on anticiper le résultat de la dernière question ?

Exercice 9. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Une *homothétie* est une application $f : E \to E$ tel qu'il existe un $\lambda \in k$ vérifiant :

$$\forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

(i) Montrer qu'une homothétie est une application linéaire. Pour toute droite vectorielle $D \subseteq E$, déterminer $f(D)$.

(ii) Soit $f : E \to E$ une application linéaire vérifiant $f(D) = D$ pour toute droite vectorielle $D \subseteq E$.

  (a) Montrer que pour tout $a \in E$, on peut trouver $\lambda_a \in k$ tel que $f(a) = \lambda_a a$.

  (b) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Comparer les $\lambda_{e_k}, k \geq 2$ avec λ_{e_1}. En déduire que f est une homothétie.