**Question de cours 1.** Montrer qu'une suite de polynômes de degrés tous distincts est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

**Question de cours 2.** Montrer qu'une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

**Question de cours 3.** Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires dans l'espace vectoriel des fonctions réelles.

**Exercice 1.** Soit G un groupe.

(i) Montrer que G a un unique élément neutre.

(ii) Montrer que l'inverse d'un élément $x \in G$ est unique.

**Exercice 2.** Soit K un corps. L'ensemble K[X] (avec les opérations + et × usuelles) est-il un corps ?

**Exercice 3.**

(i) Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(ii) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus $n$ est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$.

(iii) Trouver une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

(iv) Que dire de la dimension de $\mathbb{R}[X]$ ?

**Exercice 4.** On note $E = \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

(i) Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(ii) On note $\varepsilon^+$ la fonction $x \mapsto e^{ix}$, $\varepsilon^-$ la fonction $x \mapsto e^{-ix}$ et $T = \mathrm{Vect}(\varepsilon^+, \varepsilon^-)$. Donner une base de T et en déduire sa dimension.

(iii) T contient deux fonctions connues : lesquelles ? En donner les coefficients dans la base de la question précédente.

(iv) Montrer que les deux fonctions trouvées forment une base de T. Quels sont les coefficients de $\varepsilon^+$ et $\varepsilon^-$ dans cette nouvelle base ?

**Exercice 5.** Soit E l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
*Question préliminaire* : montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (sous les opérations usuelles).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\varepsilon_n$ la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto e^{nx}$.

(i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant : il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a_n f(x)^n + a_{n-1} f(x)^{n-1} + \cdots + a_1 f(x) + a_0 = 0.$$

Que peut-on dire sur les $a_i$ ?

(ii) Montrer que pour tout $k$-uplet $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$, la famille $(\varepsilon_{n_1}, \dots, \varepsilon_{n_k})$ est libre dans E.

(iii) Que peut-on en déduire sur la dimension de E ?

*Question bonus* (**) : la famille infinie $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendre-t-elle E ?

**Exercice 6.** Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

(i) Montrer que $E \setminus F$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

(ii) Montrer que $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ est un espace vectoriel si et seulement si $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{G}$ ou $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{F}$.

(iii) Donner une description de $\mathrm{Vect}(\mathrm{F} \cup \mathrm{G})$.

**Exercice 7.** Soient E un espace vectoriel et $\mathrm{F}, \mathrm{G}$ deux sous-espaces de E. On note $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ l'ensemble

$$\{f+g \in \mathrm{E} : f \in \mathrm{F}, g \in \mathrm{G}\}.$$

(i) Montrer que $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est un sous-espace vectoriel de E. En donner une famille génératrice.

(ii) On suppose dorénavant que pour tout $x \in \mathrm{F}+\mathrm{G}$, il existe une *unique* décomposition $x = f+g$ avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$. Montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.

(iii) Soit $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ des bases de F et G respectivement. Donner une base de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$. En déduire $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G})$.

**Exercice 8.** Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}$ deux espaces vectoriels (sur un même corps $k$). On appelle *applications linéaires* les fonctions $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ respectant :

$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in k, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

(i) Montrer que pour toute application linéaire $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, l'ensemble $f(\mathrm{E})$ est un sous-espace vectoriel de F.

(ii) Montrer que pour toute application linéaire $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, l'ensemble

$$\{x \in \mathrm{E} : f(x) = 0_{\mathrm{F}}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

(iii) Montrer que l'ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel sur $k$.

**Exercice 9.** Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On appelle *forme linéaire* les applications $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ qui respectent

$$\forall x, y \in \mathrm{E},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{et} \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

(i) Montrer que pour toute forme linéaire $f$, l'ensemble $\{x \in \mathrm{E} : f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) En déduire que pour tout $u \in \mathrm{E}$, l'ensemble

$$u^{\perp} = \{x \in \mathrm{E} : u \cdot x = 0\}$$

des vecteurs orthogonaux à $u$ est un sous-espace vectoriel de E.

(iii) On suppose dorénavant que $u \neq 0_{\mathrm{E}}$. Trouver un supplémentaire de $u^{\perp}$. En déduire la dimension de $u^{\perp}$.

**Exercice 10.** Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. Soit $m \in \mathbb{R}$. On note

$$x_1 = (m,1,1,1),\ x_2 = (1,m,1,1),\ x_3 = (1,1,m,1),\ x_4 = (1,1,1,m).$$

(i) Pour $m = 1$, décrire $\mathrm{Vect}(\{x_1, x_2, x_3, x_4\})$. En donner une base.

(ii) Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles la famille $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est génératrice.

**Exercice 11.** Le but de cet exercice est de montrer la formule de Taylor sur les polynômes, à savoir :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}], \forall a \in \mathbb{C}, \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^k \quad (n = \deg \mathrm{P}).$$

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.

(i) Montrer que $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(ii) Montrer que la famille $(1, (\mathrm{X}-a), \dots, (\mathrm{X}-a)^n)$ est une base de $\mathbb{C}_n$.

(iii) Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$, donner les coefficients de P dans cette base, et conclure. (Indice : on n'hésitera pas à dériver !).

**Exercice 12** (*)**.** On note $\mathbb{F}_2$ le corps avec deux éléments : 0 et 1. L'élément 0 est neutre pour l'addition et $1+1=0$. L'élément 1 est neutre pour la multiplication. Soit E un ensemble quelconque.

(i) Montrer que $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel pour les lois suivantes :
  — $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}), \mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{A} \Delta \mathrm{B}$, où $\Delta$ est la différence symétrique,
  — $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}), \begin{cases} 0\mathrm{A} = \emptyset \\ 1\mathrm{A} = \mathrm{A} \end{cases}$

(ii) Décrire les droites vectoriels de cet espace.

(iii) Pour $\mathrm{E} = \{1, \dots, n\}$, donner une base de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$. En déduire $\dim \mathscr{P}(\mathrm{E})$.