Question de cours 1. *Démonstation des résultats usuels sur les coefficients binomiaux par des méthodes combinatoires.*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $k \in \{0, \ldots, n\}$,
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

(iii) Démontrer la formule du binôme de Newton.

Question de cours 2. *Démonstration des formules de trigonométrie en utilisant les complexes.*

(i) pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$,
$$\cos(2\vartheta) = 2\cos^2\vartheta - 1, \qquad \sin(2\vartheta) = 2\cos\vartheta\sin\vartheta.$$

(ii) pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$,
$$\cos(3\vartheta) = 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta, \qquad \sin(3\vartheta) = 3\sin\vartheta - 4\sin^3\vartheta.$$

(iii) pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.$$

Exercice 1. *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\vartheta \in \mathbb{R}$. *Calculer :*
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\vartheta), \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\vartheta)$$

Exercice 2. *Montrer que pour tout* $z, z' \in \mathbb{C}$, *on a*
$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Interpréter graphiquement et le montrer directement.

Exercice 3.

(i) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ *unitaire, i.e. s'écrivant*
$$P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$$
avec les $a_i \in \mathbb{C}$. *Exprimer* a_1 *et* a_n *en fonction des racines de* P.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. *Notons* $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ *les racines n-ième de l'unité. Calculer :*
$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k.$$

(iii) Retrouver les valeurs précédentes par un calcul direct.

Exercice 4. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$. Calculer :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\vartheta), \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\vartheta).$$

Exercice 5. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que :*

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\vartheta) = \cos(n\vartheta).$$

Mettre T_n sous forme scindée.

Exercice 6. *Soient $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.*

(i) Montrer qu'il existe un polynôme $L_k \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n$ tel que

$$\forall i \neq k,\ L_k(a_i) = 0, \qquad L_k(a_k) = 1.$$

(ii) Soient $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n$ tel que

$$\forall i \in \{0, \dots, n\},\ P(a_i) = b_i.$$

(iii) Montrer que le polynôme P de la question précédente est unique.

Exercice 7. *Soit $n \geq 1$. Posons $\omega = e^{2i\pi/n}$.*

(i) Trouver les racines complexes du polynôme

$$1 + X + \cdots + X^{n-1}.$$

(ii) À l'aide de la question précédente, calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$.

Exercice 8. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P = X^n + 1$ et $\omega = e^{i\pi/n}$.*

(i) Pour tout k impair, calculer $P(\omega^k)$.

(ii) En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9. *Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet une racine réelle.*

Exercice 10. *Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

(i) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (en z) : $z^n = a^n$.

(ii) En déduire une résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (en z) :

$$(1+z)^n = i(1-z)^n.$$

Exercice 11. *Soient $n, m \in \mathbb{N}$.*

(i) En utilisant l'égalité (dans $\mathbb{R}[X]$) $(X+1)^n(X+1)^m = (X+1)^{m+n}$, établir

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

(ii) En déduire la valeur de $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

Exercice 12 ($*$)**.** *On cherche à déterminer les polynômes* $P \in \mathbb{C}[X]$ *vérifiant*

$$P(X^2) = P(X)P(X+1).$$

(i) *Déterminer les polynômes constants répondant au problème.*

(ii) *On suppose dorénavant que* $\deg P \geq 1$. *Soit* $\alpha \in \mathbb{C}$ *une racine de* P.

- *a.* *Montrer que* α^{2^k} *est une racine de* P *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.
- *b.* *En déduire que* $\alpha = 0$ *ou* $|\alpha| = 1$.
- *c.* *Montrer que* $(\alpha - 1)^2$ *est également racine de* P.
- *d.* *En déduire* $\alpha \in \{0, 1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$.
- *e.* *Éliminer deux des possibilités.*

(iii) *Conclure que les* P *convenables sont les polynômes*

$$X^n(X-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$