Question de cours 1 (Formule de Pascal)**.** *Montrer par le calcul :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \{0, \dots, n\}, \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

Question de cours 2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer, en utilisant le binôme de Newton, la formule*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Question de cours 3. *Soit* E *un ensemble fini. Établir une bijection* $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \to \{0,1\}^{\mathrm{E}}$. *En déduire le cardinal de* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

Exercice 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} k \binom{n}{k}.$$

Exercice 2. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Calculer*

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

(ii) *En déduire :*

$$\mathrm{E}_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}, \quad \mathrm{O}_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Exercice 3. *Montrer la formule* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ *sans utiliser le binôme de Newton.*

Exercice 4. *Montrer la formule de Pascal par des arguments combinatoires.*

Exercice 5. *Soit* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une fonction injective telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq n$. *Montrer que f est l'identité.*

Exercice 6. *Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Calculer :*

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} 2^{i+j}.$$

Exercice 7. *Soit* $(\mathrm{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite de* Fibonacci, *i.e. la suite définie par*

$$\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}_1 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on a la majoration* $\mathrm{F}_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Exercice 8. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 9. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes :*

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\vartheta), \qquad \mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\vartheta).$$

Exercice 10.

(i) Trouver un polynôme P *de la forme* $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ *tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - P(x-1) = x^3.$$

(ii) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on la formule*

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 11 (*)**.** *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\vartheta \in \mathbb{R}$*. Donner une expression de* $\cos(n\vartheta)$ *en fonction de* $\cos(\vartheta)$ *et* $\sin(\vartheta)$*.*
En déduire une expression simple de

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k}.$$

Exercice 12. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$\forall p \in \{0, \dots, n\},\ \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 13. *Soient* A, B, C, D *des sous-ensembles d'un ensemble* X*. Montrer la formule :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C \cup D) = &\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) + \mathrm{Card}(D) - \mathrm{Card}(A \cap B)\\ &- \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(A \cap D) - \mathrm{Card}(B \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap D)\\ &- \mathrm{Card}(C \cap D) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap C \cap D)\\ &+ \mathrm{Card}(B \cap C \cap D) - \mathrm{Card}(A \cap B \cap C \cap D).\end{aligned}$$

Exercice 14 (*)**.** *Trois personnes arrivent aux restaurants, chacune avec un parapluie, tous identiques. Ils déposent chacun leur parapluie aux vestiaires où les parapluies sont mélangés. En repartant du restaurant, chacun reprend un des trois parapluies. Quelle est la probabilité qu'aucun ne récupère le sien ?*