Question de cours 1. *Toute fonction réelle s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Question de cours 2. *Montrer que* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1. *Soient* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *et* $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *deux fonctions. Montrer que*

(i) si $g \circ f$ *est injective, alors* f *est injective,*

(ii) si $g \circ f$ *est surjective, alors* g *est surjective.*

Exercice 2. *Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une fonction, avec* $\mathrm{E} \neq \emptyset$. *Montrer que*

(i) f *est injective si et seulement s'il existe* $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ *telle que* $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$,

(ii) f *est surjective si et seulement s'il existe* $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ *telle que* $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$.

En déduire que f *est une bijection si et seulement si* f *est inversible.*

Bonus : *où a-t-on utilisé l'hypothèse* $\mathrm{E} \neq \emptyset$ *?*

Exercice 3.

1. *Soient* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *et* $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *deux fonctions. Montrer que*
   (i) si f *et* g *sont injectives, alors* $g \circ f$ *aussi,*
   (ii) si f *et* g *sont surjectives, alors* $g \circ f$ *aussi.*
2. *Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ *une fonction telle que* $f \circ f \circ f = f \circ f$. *Montrer que*
   (i) si f *est injective, alors* f *est l'identité de* E,
   (ii) si f *est surjective, alors* f *est l'identité de* E.

Exercice 4 (*). *Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une fonction. On note* $f_* : \mathcal{P}(\mathrm{E}) \to \mathcal{P}(\mathrm{F})$ *l'image directe et* $f^{-1} : \mathcal{P}(\mathrm{F}) \to \mathcal{P}(\mathrm{E})$ *l'image réciproque. Montrer que*

(i) f *est injective si et seulement si* $f^{-1} \circ f_* = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(\mathrm{E})}$,

(ii) f *est surjective si et seulement si* $f_* \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(\mathrm{F})}$.

Exercice 5. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, n^2 *pair* $\implies$ n *pair.*

Exercice 6. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$. *Montrer*

$$(\forall \varepsilon > 0,\, a < b + \varepsilon) \implies a \leq b.$$

Exercice 7. *Soient* A, B, C *trois ensembles. Montrer qu'il existe une bijection*

$$(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{C} \simeq \mathrm{A} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C}).$$

Exercice 8. *Soient* A *et* B *deux sous-ensembles d'un ensemble* E. *Exprimer* $\mathbb{1}_{\mathrm{A}^c}$, $\mathbb{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}$ *et* $\mathbb{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}$ *en fonction de* $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ *et* $\mathbb{1}_{\mathrm{B}}$. *En déduire* $\mathbb{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}$, *puis* $\mathbb{1}_{\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}}$.

Exercice 9 (*). *Pour toute propriété* P *sur un ensemble* E, *on note* X_P *l'ensemble*

$$\mathrm{X}_\mathrm{P} = \{x \in \mathrm{E} : \mathrm{P}(x)\}.$$

Exprimer les ensembles ${\mathrm{X}_\mathrm{P}}^c$, $\mathrm{X}_\mathrm{P} \cup \mathrm{X}_\mathrm{Q}$ *et* $\mathrm{X}_\mathrm{P} \cap \mathrm{X}_\mathrm{Q}$ *en tant que* $\mathrm{X}_?$. *En particulier, pour une propriété* P, *que vaut* $\mathrm{X}_\mathrm{P} \cap \mathrm{X}_{\neg\mathrm{P}}$ *et* $\mathrm{X}_\mathrm{P} \cup \mathrm{X}_{\neg\mathrm{P}}$.

Application : trouver les complémentaires de

$$\{n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N},\, 2k \neq n\}, \quad \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}, \exists \ell \in \mathbb{N},\, k\ell = n \text{ et } k\ell \neq 1\}.$$

Exercice 10 (**). *Montrer qu'un ensemble* E *est infini si et seulement si toute fonction* $\mathrm{E} \to \mathrm{E}$ *stabilise une partie non triviale.*

Exercice 11 (**). *Soit* E *l'ensemble* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *des fonctions* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *On définit la fonction* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{E}^{\mathrm{E}}$ *par*

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathrm{E},\ \varphi_\vartheta(f) : x \mapsto f(x+\vartheta)$$

où φ_ϑ *est une notation pour* $\varphi(\vartheta)$.

(i) Montrer que pour tous $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}$, *on a* $\varphi_{\vartheta_1+\vartheta_2} = \varphi_{\vartheta_2} \circ \varphi_{\vartheta_1}$.

(ii) Montrer que φ *est à valeurs dans les bijections de* E *dans* E.

Exercice 12. *Soit* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une fonction strictement croissante. Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geq n.$$

Exercice 13. *Soit* E *un ensemble. Exhiber une bijection entre* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ *et* $\{0,1\}^{\mathrm{E}}$.

Supposons de plus que E *est fini de cardinal* n. *Déterminer le cardinal de* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

Exercice 14 (**). *Une* relation d'ordre *sur une ensemble* E *est un sous-ensemble* $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{E} \times \mathrm{E}$ *tel que*

(i) pour tout $x \in \mathrm{E}$, $(x,x) \in \mathcal{R}$,

(ii) pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, *si* $(x,y) \in \mathcal{R}$ *et* $(y,x) \in \mathcal{R}$, *alors* $x = y$,

(iii) pour tous $x, y, z \in \mathrm{E}$, *si* $(x,y) \in \mathcal{R}$ *et* $(y,z) \in \mathcal{R}$, *alors* $(x,z) \in \mathcal{R}$.

On dit que $\mathcal{R}$ *est* totale *si pour tous* $x, y \in \mathrm{E}$, *on a*

$$(x,y) \in \mathcal{R} \quad \text{ou} \quad (y,x) \in \mathcal{R}.$$

1. *Pour se mettre en jambes, montrer que* $\mathcal{R}_{\leq} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$ *est une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}$. $\mathcal{R}_{\leq}$ *est-elle totale ?*
2. *Soit* E *un ensemble. Montrer que*

$$\mathcal{R}_{\subseteq} = \{(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \times \mathcal{P}(\mathrm{E}) : \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}\}$$

est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\mathrm{E})$. $\mathcal{R}_{\subseteq}$ *est-elle totale ?*

Exercice 15. *Déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaisant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 16 (*). *Que pensez-vous de l'assertion*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0 \implies x = 1 \quad ?$$

Exercice 17. *Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une fonction. Énoncer formellement (avec quanteurs) la propriété « f est injective ». Donner une autre forme équivalente en utilisant la contraposée.*

Exercice 18 (***). *Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une fonction. On se propose de montrer que l'on peut écrire* $f = i \circ s$ *avec* s *une surjection et* i *une injection.*

(i) Notons $\mathrm{Q} = \{f^{-1}(y) : y \in f(\mathrm{E})\} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{E})$. *Montrer que pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *il existe* $\mathrm{X} \in \mathrm{Q}$ *tel que* $x \in \mathrm{X}$. *En déduire une application* $\mathrm{E} \to \mathrm{Q}$.

(ii) Conclure.