L'idée de ces questions de cours était de vérifier que vous connaissiez vos définitions et que vous compreniez l'intuition derrière le vocabulaire utilisé. Ce n'était certes pas inutile : trop d'entre vous ne connaisent leurs définitions qu'approximativement...

Solution de la question de cours 1. Supposons $f \sim_a g$. Par définition : $f - g = o_a(f)$. C'est donc qu'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et

$$\forall x \in \mathrm{V},\ f(x) - g(x) = \varepsilon(x) f(x).$$

Comme $\lim_a \varepsilon = 0$, quitte à restreindre V, on peut supposer que $1 - \varepsilon(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathrm{V}$. Alors :

$$\forall x \in \mathrm{V},\ f(x) = g(x)\frac{1}{1-\varepsilon(x)} = g(x)\left(1 - \frac{-\varepsilon(x)}{1-\varepsilon(x)}\right).$$

En notant $\varepsilon'(x) = -\varepsilon(x)/(1-\varepsilon(x))$, on a donc trouvé une fonction ε' définie sur un voisinage de a telle que $\lim_a \varepsilon' = 0$ et

$$\forall x \in \mathrm{V},\ g(x) - f(x) = \varepsilon'(x) g(x).$$

Ce qui est exactement la définiton de $g \sim_a f$.

Solution de la question de cours 2. f négligeable devant g se note $f = o_a(g)$ et signifie : il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et

$$\forall x \in \mathrm{V},\ f(x) = g(x)\varepsilon(x).$$

[*Un bon nombre d'entre vous ont écrit seulement $f(a) = g(a)\varepsilon(a)$. Cette équation n'est pas pertinente : elle ne parle que du point a, pas de ce qui se passe autour de a ; de plus, si $a = +\infty$, ça n'a juste pas de sens...*]
Une façon de justifier « négligeable » est la suivante : s'il faut multiplier g par des valeurs de plus en plus petites ($\lim_a \varepsilon = 0$) pour atteindre les valeurs de f, c'est que f est *très petite* devant g. Une autre façon était de dire : le ratio d'une pertubation de g par f sur g est $(g+f)(x)/g(x) = 1 + \varepsilon(x)$ qui tends vers 1 en a, donc f n'a pas de *réelle incidence* sur g. Tout ceci était bien entendu informel, et beaucoup d'autres justifications pouvaient être apportées.

Solution de la question de cours 3. f est équivalente à g en a se note $f \sim_a g$ et signifie : $f - g = o_a(f)$. Par la première question de cours, c'est également $g - f = o_a(g)$. Bref, c'est dire que la différence de f et de g est négligeable devant les quantités considérées (f et g elle-mêmes).
Une autre façon de voir les choses, que beaucoup d'entre vous ont préféré : si $g \neq 0$ au voisinage de a, alors $\lim_a f/g = 1$; dire que le ratio tends vers 1, c'est dire que les fonctions *se ressemblent* au voisinage de a. C'était tout aussi acceptable. Attention tout de même à ne pas croire que cela veut dire que les graphes de f et g tendent nécessairement l'un vers l'autre : par exemple $1 + x^2 \sim_{+\infty} x^2$ et pourtant les courbes ont toujours un écart constant.
[*Un certain nombre d'entre vous a pris $\lim_a f/g$ pour définition de $f \sim_a g$. Ceci n'est pas une définition acceptable : si g est nulle au voisinage de a, ça n'a aucun sens par exemple.*]

Solution 1. (i) Pour tout $t \geq 1$, on a

$$0 < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

On intègre entre 1 et $x > 1$ pour trouver

$$0 < \ln x - \ln 1 \leq 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}.$$

Comme $\ln 1 = 0$, c'est exactement ce que l'on voulait montrer.
[*Une analyse de la fonction* $x \mapsto \ln x - 2\sqrt{x}$ *marche aussi très bien et est peut-être plus naturelle. La méthode ci-dessus à l'avantage d'être extrêmement concise.*]
En divisant l'inégalité trouvée par $1/x$ (c'est > 0 donc pas de souci), on a

$$\forall x > 1,\, 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Le théorème d'encadrement nous permet donc de conclure :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

(ii) Il suffit ici de faire apparaître le $\ln(x)/x$ de la question précédente :

$$\forall x > 0,\, x^n e^{-x} = e^{n \ln x} e^{-x} = \exp\left(x\left(n\frac{\ln x}{x} - 1\right)\right).$$

Or $n\ln(x)/x - 1$ tend vers -1 quand $x \to +\infty$ par la question précédente, donc l'argument complet de l'exponentiel tend vers $-\infty$: ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

Si on note ε la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$, on a $\lim_{+\infty} \varepsilon = 0$ et

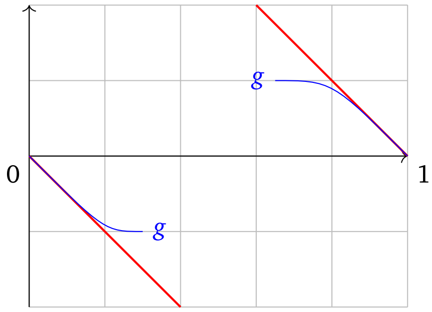
$$\forall x \in \mathbb{R},\, x^n = \varepsilon(x) e^x.$$

C'est-à-dire que $x^n = o_{x \to +\infty}(e^x)$.
[*Cette dernière équation est une formulation succinte de ce que vous avez appelé « croissance comparée » dans les cours précédents. Cette formulation a l'avantage de dire exactement ce que l'on cherche à dire :* x^n *est négligeable devant* e^x.]

Solution 2. Montrer que f admet un point fixe est équivalent à montrer que $g : x \mapsto f(x) - x$ (definie sur $[0,1]$) s'annule sur $]0,1[$. Pour cela, on a envie d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g. Il faut donc vérifier qu'on est dans les hypothèses de ce théorème.
Les hypothèses sur f donne sur g les conditions suivantes :

$$g(0) = 0 = g(1), \quad g'(0) = -1 = g'(1).$$

À ce stade, il faut faire un dessin pour se rendre compte de la situation, du moins localement autour de 0 et de 1.



On voit donc bien que proche de 0, il existe des valeurs négatives pour g et proche de 1 des valeurs positives : le théorème des valeurs intermédiaires va donc pouvoir s'appliquer.
Bien entendu, ce qui précède n'est pas une preuve. On va montrer rigoureusement ce que l'on voit sur le dessin. La définition même de $g'(0) = -1$ est

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -1.$$

Ici, $g(0) = 0$, donc on a $\lim_{x\to 0} g(x)/x = -1$. C'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,\eta], \left|\frac{g(x)}{x} + 1\right| \leq \varepsilon.$$

Appliquons cela avec $\varepsilon = 1/2$: il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,\eta], -\frac{1}{2} \leq \frac{g(x)}{x} + 1 \leq \frac{1}{2}.$$

C'est notamment vrai pour $x = \eta$ et on trouve donc (en soustrayant 1) :

$$-\frac{3}{2} \leq \frac{g(\eta)}{\eta} \leq -\frac{1}{2}.$$

En particulier, $g(\eta)/\eta < 0$ et comme $\eta > 0$, c'est donc que $g(\eta) < 0$.
En exploitant de même (faites-le !) la définition de $g'(1) = -1$, on trouve un $\delta > 0$ tel que $g(1-\delta) > 0$.

Solution 3. (i) Il s'agissait ici simplement de retrouver l'équation de la tangente à une courbe en un point de dérivabilité. C'est une formule de lycée, et s'il est compréhensible que vous ne la connaissiez pas par coeur, il est inadmissible de ne pas savoir la retrouver...

La fonction linéaire t_a s'écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t_a(x) = \alpha x + \beta$ où α est la pente de la droite (graphe de t_a) et β son ordonné à l'origine. Or, on sait que la pente de la tangente à f au point $(a, f(a))$ est $f'(a)$: donc $\alpha = f'(a)$. Il suffit donc de trouver un point de la droite t_a pour trouver β. Mais on sait que $(a, f(a))$ appartient à cette droite par définition de la tangente :

$$f(a) = f'(a)a + \beta \iff \beta = f(a) - f'(a)a.$$

Ainsi, la fonction t_a s'exprime comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ t_a(x) = f'(a)(x-a) + f(a).$$

(ii) On veut montrer que $f(x) = t_a(x) + o_{x\to a}(x-a)$. Autrement dit, on cherche ε définie dans un voisinage V de a telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et

$$\forall x \in \mathrm{V},\ f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \varepsilon(x)(x-a).$$

C'est donc équivalent à montrer que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = 0.$$

Or, pour tout $x \neq a$,

$$\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a).$$

Le premier terme du membre de droite est le taux d'accroissement de f en a et donc tends vers $f'(a)$ par définition de la dérivée. CQFD.

(iii) Il fallait ici se rendre compte qu'appliquer directement le résultat précédent à $f : x \mapsto \sin(x)/x$ ne menait nulle part. En revanche, on peut essayer de l'appliquer à $f : x \mapsto \sin x$ et $a = 0$. Dans ce cas, on obtient

$$\sin x = \sin(0) + \sin'(0)(x-0) + \underset{x\to 0}{o}(x-0) = x + \underset{x\to 0}{o}(x).$$

Donc il existe ε définie sur un voisinnage V de 0 telle que $\lim_0 \varepsilon = 0$ et

$$\forall x \in \mathrm{V},\ \sin x = x + x\varepsilon(x).$$

En divisant par x dans ce qui précède, on a

$$\forall x \in \mathrm{V}\setminus\{0\},\ \frac{\sin x}{x} = 1 + \varepsilon(x).$$

Donc $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x$ existe et vaut 1. D'où un prolongement par continuité de $x \mapsto \sin(x)/x$ en 0 par la valeur 1.

Cet exercice est une introduction à ce qu'on appelle les *développements limités*. On vient de montrer que tout fonction (suffisamment gentille) peut s'écrire en tout point comme la somme d'une fonction linéaire (dépendant du point bien sûr !) et d'un reste négligeable devant les terme d'ordre 1. L'exercice suivant montre que ce genre d'approximation peut se faire en tout degré.

Solution 4.

Solution 5.

Solution 6. Pour montrer qu'une fonction est constante, on n'a pas 36 solutions. En fait, on en a principalement deux : montrer à la main que $f(x) = f(y)$ quelque soient x et y, et montrer que la fonction est dérivable partout de dérivée nulle.
On opte ici pour la seconde solution. Soit $a \in \mathbb{R}$, et montrons que f est dérivable en a avec $f'(a) = 0$. Pour tout $x \neq a$, on a par hypothèse :

$$-\alpha\,|x-a| \leq \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leq \alpha\,|x-a|\,.$$

Les fonctions $x \mapsto \pm\alpha\,|x-a|$ tendent évidemment vers 0 en a. Le théorème d'encadrement assure donc que

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \overset{\text{existe}}{=} 0.$$

Or, pour toute fonction g, si $|g|$ tends vers 0 en un point, g aussi. Donc :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{\text{existe}}{=} 0.$$

C'est exactement ce que l'on cherchait à montrer.

[On a utilisé le petit résultat suivant : si g est une fonction définie au voisinage de a et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_a |g| = 0 \implies \lim_a g = 0.$$

Un bon exercice est de le montrer (ceci dit je n'attendais pas une démonstration du résultat lors de la colle). Indice : ça n'utilise que la définition des limites et une certaine inégalité...]

Solution 7. Dans le cas où vous n'auriez pas vu l'utilisation des *petits-o* pour les suites, je redonnais la définition : on dit que la suite u est négligeable devant v, et on note $u = o_{+\infty}(v)$, s'il existe une suite ε tendant vers 0 et telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Soit $n \geq 1$. On commence déjà par manipuler le terme du centre :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Montrons l'inégalité de droite dans un premier temps. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave et de dérivée 1 en 0, donc son graphe est toujours au-dessous de la première bissectrice (le graphe de $x \mapsto x$) : autrement dit, pour tout $x \geq 0$, on a $x \geq \ln(x+1)$. En particulier en $x = 1/n$:

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

(Le lecteur non convaincu par l'argument ci-dessus peut tout simplement faire une étude détaillée de la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$ pour se rendre compte qu'elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.)

Passons à l'inégalité de gauche, qui est équivalente à

$$-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{-1}{n+1}.$$

La fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est concave et de dérivée -1 en 0, donc son graphe est toujours au-dessous de celui de $x \mapsto -x$: autrement dit, pour tout $x \leq 0$, on a $-x \geq \ln(1-x)$. En particulier pour $x = -1/(n+1)$:

$$-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{-1}{n+1}.$$

(Même remarque que précédemment.)

[Remarque : il y avait sûrement bien d'autres façons de montrer ceci, par exemple en considérant $\ln(n+1) - \ln(n) = \int_n^{n+1} \mathrm{d}t/t$*...]*

(ii) Commençons par montrer que u est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln n + 1 + \ln(n) \leq 0.$$

(L'inégalité est ici donnée par la partie gauche de l'inéglité de la première question.)

Montrons maintenant que u est minorée par 0. Pour cela, on somme *toutes* les inégalités de droite de la première question pour $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Le membre de gauche est une somme téléscopique qui vaut donc au final $\ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$. Ainsi, en enlevant $\ln n$ de chaque côté, on a :

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq u_n.$$

Mais on sait que le membre de gauche est minoré par $1/(n+1)$ donc notamment par 0.

(iii) La suite u est décroissante et minorée par 0, donc converge vers un réel $\gamma \geq 0$. Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - \gamma) = 0.$$

Donc en notant $\varepsilon_n = u_n - \gamma$ pour tout n, on a que ε converge vers 0 et

$$u_n - \gamma = \varepsilon_n \times 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $u_n - \gamma = o_{n\to+\infty}(1)$. Ce qui se réécrit explicitement comme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

[J'ai ici détaillé, mais il faut que ça devienne un réflexe : $u_n = o_{n\to+\infty}(1)$ (respectivement $f = o_a(1)$) signifie exactement $\lim_{+\infty} u = 0$ (respectivement $\lim_a f = 0$)]

Solution 8. (i) f est clairement continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme produit de composées de foncitons continues et dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Il suffit donc de vérifier la continuité et dérivabilité en 0. Commençons par la continuité : sin étant à valeurs dans $[-1, 1]$,

$$\forall x \neq 0, -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

Par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Ainsi, f est continue en 0.

De même, pour tout $x \neq 0$,

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq x.$$

Donc par le théorème d'encadrement, le taux de variation de f en 0 tends vers 0 : c'est-à-dire f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(ii) Pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Grâce à la question précédente, on peut donc donner une expression de f' comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iii) Bien entendue, l'expression de f' trouvée en question (ii) montre que f' est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Supposons par l'absurde que f' est continue en 0. Cela signifie que $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$. Or, on a vu précédemment que $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$ existe et vaut 0. Ainsi,

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - f'(x)$$

converge quand $x \to 0$ vers $2 \times 0 - 0 = 0$. Notamment, comme la suite $(1/(2\pi n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, le théorème de composition de limite assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \cos(2\pi n) = 0.$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(2\pi n) = 1$. Contradiction !

L'hypothèse était donc absurde : f' n'est pas continue en 0.

[Cet exercice donne un exemple de fonction continue, dérivable partout, mais donc la dérivée n'est pas continue. Cela peut sembler inhabituel car on manipule toujours des fonctions « gentilles », qu'on peut dériver autant de fois que l'on veut. Attention de ne pas croire que c'est tout le temps le cas ! (Tracez la fonction sur un logiciel pour vous rendre compte que son graphe n'est pas aberrant : cette fonction pourrait donc tout à fait émerger dans la vraie vie !)]

Solution 9. (i) Comme $f(a)f(b) < 0$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

De plus, $f' > 0$ sur $[a, b]$, i.e. f est strictement croissante sur $[a, b]$ et donc en particulier injective : α est l'unique zéro de f sur $[a, b]$.

(ii) Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, f et f' sont dérivables, et donc φ aussi :

$$\forall x \in [a, b],\ \varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Comme $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$, $\varphi'(x)$ est du signe de $f(x)$. On en déduit le tableau de variation ci-dessous :

x	a	α	b
$\varphi(x)$	$\searrow$	$\varphi(\alpha) = \alpha$	$\nearrow$

(iii) L'équation de la droite T_n est $y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$.

[Si vous ne connaissez pas l'équation de la tangente par coeur, il faut être capable de la retrouver rapidement : le coefficient directeur de la tangente au point

$(a, f(a))$ *est* $f'(a)$ *par définition même de la dérivée ; on trouve ensuite l'ordonnée à l'origine simplement en évaluant l'équation au point* $(a, f(a))$ *qui fait partie de la droite.]*

Pour trouver le point d'intersection de T_n avec l'axe des abscisses, il suffit donc de résoudre l'équation :

$$0 = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n). \tag{1}$$

La seule solution de cette équation est $u_n - f(u_n)/f'(u_n)$, c'est-à-dire $\varphi(u_n) = u_{n+1}$. Autrement dit, pour passer de u_n à u_{n+1}, on trace la tangente à la courbe de f au point $(u_n, f(u_n))$ et le point d'intersection de cette dernière avec l'axe des abscisses donne u_{n+1}.

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) - u_n = -f(u_n)/f'(u_n).$$

Comme $f' > 0$ sur $[a, b]$, cette expression est de signe opposé à f. Montrons alors $u_n \in [\alpha, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui permettra de conclure que u décroit (car f est positive sur $[\alpha, b]$).

On a montré que φ est croissante et continue sur $[\alpha, b]$ et que $\varphi(\alpha) = \alpha$, donc $\varphi([\alpha, b]) = [\alpha, \varphi(b)]$. De plus,

$$\varphi(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b,$$

donc $\varphi([\alpha, b]) \subseteq [\alpha, b]$. Une récurrence rapide montre alors que $u_n \in [\alpha, b]$ pour tout n : c'est vrai pour $u_0 = b$; et si c'est vrai pour u_n, alors $u_{n+1} = \varphi(u_n) \in [\alpha, b]$.

Ainsi, u est décroissante et minorée par α, donc converge vers une limite finie ℓ. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans

$$\varphi(u_n) = u_{n+1},$$

la continuité de φ assure que $\ell = \varphi(\ell)$, i.e.

$$\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} \iff f(\ell) = 0.$$

Or on sait que f a un unique point fixe : ainsi $\ell = \alpha$.

[Cet exercice donne une méthode pour approximer les zéros d'une fonction, dite méthode de Newton. *Pour voir à quelle vitesse cette approximation converge, il faut des outils un peu plus fin que vous verrez sûrement plus tard dans l'année, à savoir la* formule de Taylor-Lagrange. *]*