Solution de la question de cours 1. On suppose que les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ pour simplifier et qu'elles sont dérivables en $a \in \mathbb{R}$. On veut alors montrer que fg est dérivable en a et que $fg'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. Alors :

$$\forall x \neq a,\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}f(a) = \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}.$$

Le membre de droite est précisément le taux de variation en a de fg. Il suffit donc de montrer que le membre de gauche admet une limite quand $x \to a$ et de calculer celle-ci. Or :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= f'(a) \qquad \text{(car } f \text{ dérivable en } a\text{)},\\
\lim_{x\to a} g(x) &= g(a) \qquad \text{(car } g \text{ continue en } a\text{)},\\
\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} &= g'(a) \qquad \text{(car } g \text{ dérivable en } a\text{)},\\
\lim_{x\to a} f(a) &= f(a) \qquad \text{(car } y \mapsto f(a) \text{ est une fonction constante !)}
\end{aligned}$$

Par somme et produit de limites, le membre de gauche admet donc une limite en a, à savoir $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. CQFD.

Solution de la question de cours 2. Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$. Par définition de $\lim_{+\infty} g = -\infty$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geq x_0,\ g(x) \leq \mathrm{M}.$$

De plus, $\lim_a f = +\infty$, donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in \,]a-\eta, a+\eta[,\ f(y) \geq x_0.$$

Alors, pour tout $y \in \,]a-\eta, a+\eta[$, on a notamment, $g \circ f(y) \leq \mathrm{M}$.
On a donc montrer que :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall y \in \,]a-\eta, a+\eta[,\ g \circ f(y) \leq \mathrm{M}.$$

C'est la définition même de $\lim_a g \circ f = -\infty$.

Solution de la question de cours 3. On suppose pour plus de simplicité que f est définie sur $\mathbb{R}$ entier et ne s'annule jamais et qu'elle est dérivable en $a \in \mathbb{R}$. On veut alors montrer que $1/f$ est dérivable en a et que sa dérivée y vaut $-f'(a)/f(a)^2$. On essaye donc de transformer le taux de variation de $1/f$:

$$\forall x \neq a,\ \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = \frac{f(a)-f(x)}{x-a}\frac{1}{f(x)f(a)}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(a)-f(x)}{x-a} &= -f'(a) \qquad \text{(car } f \text{ dérivable en } a\text{)},\\
\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)f(a)} &= \frac{1}{f(a)^2} \qquad \text{(car } f \text{ continue en } a\text{)}.
\end{aligned}$$

Le taux de variation de $1/f$ admet ainsi une limite quand $x \to a$ et cette limite vaut $-f'(a)/f(a)^2$. CQFD.

Solution 1. (i) Pour tout $x > 1$,

$$0 < \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}.$$

(ii) Pour tout $x > 1$, on divise par x l'inégalité de la question précédente :

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} 2/\sqrt{x} = 0$. Donc, par le théorème des encadrements, on a le résultat voulu :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Soit $n \geq 1$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^n \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{n \ln x - x} = \mathrm{e}^{-x(n\frac{\ln x}{x}+1)}.$$

Comme $\ln x/x$ tends vers 0 en $+\infty$, on a que l'exposant de e dans le membre de droite tends vers $-\infty$. Ainsi, par composition de limites,

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

(Pour la culture, ce résultat est souvent invoqué sous le nom de « croissance comparée ». Il faut retenir : les exponentielles l'emportent sur les polynômes, qui eux l'emportent sur les logarithmes. Bien entendu, tout cela dépend des arguments et il ne faut pas appliquer le principe aveuglément...)

(iii) Cette question est une application du résultat démontré à la question précédente.

En effet, par composition et croissance comparée,

$$\lim_{x\to 0} e{-}\frac{1}{x}x = \lim_{y\to+\infty} y\mathrm{e}^y = 0.$$

On peut donc prolonger par continuité la fonction f en 0 en posant $f(0) = 0$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

Par composition puis croissance comparée,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} y^2 e^{-y} = 0.$$

Ainsi, le prolongement de f est dérivable en 0 et la valeur de cette dérivée est 0.

Solution 2. (i) f est clairement continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme produit de composées de foncitons continues et dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Il suffit donc de vérifier la continuité et dérivabilité en 0. Commençons par la continuité : sin étant à valeurs dans $[-1, 1]$,

$$\forall x \neq 0, -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

Par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Ainsi, f est continue en 0.

De même, pour tout $x \neq 0$,

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq x.$$

Donc par le théorème d'encadrement, le taux de variation de f en 0 tends vers 0 : c'est-à-dire f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(ii) Pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Grâce à la question précédente, on peut donc donner une expression de f' comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iii) Bien entendue, l'expression de f' trouvée en question (ii) montre que f' est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Supposons par l'absurde que f' est continue en 0. Cela signifie que $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$. Or, on a vu précédemment que $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$ existe et vaut 0. Ainsi,

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - f'(x)$$

converge quand $x \to 0$ vers $2 \times 0 - 0 = 0$. Notamment, comme la suite $(1/(2\pi n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, le théorème de composition de limite assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \cos(2\pi n) = 0.$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(2\pi n) = 1$. Contradiction !

L'hypothèse était donc absurde : f' n'est pas continue en 0.

Cet exercice donne un exemple de fonction continue, dérivable partout, mais donc la dérivée n'est pas continue. Cela peut sembler inhabituel car on manipule toujours des fonctions « gentilles », qu'on peut dériver autant de fois que l'on veut. Attention de ne pas croire que c'est tout le temps le cas ! (Tracez la fonction sur un logiciel pour vous rendre compte que son graphe n'est pas aberrant : cette fonction pourrait donc tout à fait émerger dans la vraie vie !)

Solution 3. (i) Supposons que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ en $+\infty$. Alors, pour toute suite u convergeant vers $+\infty$, le théorème de composition de limite assure que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons alors $u_n = x + nt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $t > 0$, la suite u converge vers $+\infty$. Ainsi, on a que la suite $v = (f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers

ℓ. Mais par périodicité de f, $f(x+nt) = f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: autrement dit, la suite v est constante de valeur $f(x)$ et converge donc vers $f(x)$. Par unicité de la limite d'une suite, on a donc que $\ell = f(x)$.

On a donc montré : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ell$. La fonction f est donc constante de valeur ℓ.

(ii) Soient deux réels $x \leq y$. On cherche à montrer que $f(x) = f(y)$. La suite $(u_n = x+nt)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$, donc il existe n_0 tel que $u_{n_0} \geq y$. Ainsi,

$$f(x) \leq f(y) \leq f(u_{n_0}) = f(x+nt) = f(x).$$

Ainsi, $f(x) = f(y)$.

(iii) Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $n = \lfloor a/t \rfloor$ (on trouve ce n par une rapide analyse-synthèse au brouillon). Alors $a - nt \in [0, t]$. Par hypothèse, f est continue en $a - nt$. Cela signifie $\lim_{x\to a-nt} f(x) = f(a-nt)$. Or, par périodicité de f, $f(a-nt) = f(a)$ et $f(x) = f(x+nt)$ pour tout x, donc

$$\lim_{x\to a-nt} f(x+nt) = f(a).$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de composition de fonction pour conclure : comme $x+nt$ tends vers a quand $x \to a-nt$, on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

C'est exactement la définition de la continuité de f en a.

Solution 4. (i) On pose $g : x \mapsto f(x) - x$. La somme de deux fonctions continues étant continue, g est continue sur $[0,1]$. De plus, $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$: on peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires qui assure l'existence d'un $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$. Alors $f(c) = c$: autrement dit, c est un point fixe de f.

(ii) Soit $a \in [0,1]$. Alors pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq |f(x) - f(a)| \leq k\,|x-a|.$$

Or, $\lim_{x\to a} x - a = 0$, donc par composition $\lim_{x\to a} |x-a| = 0$. Le théorème des encadrements assure alors que le membre du centre admet 0 comme limite quand $x \to a$. On écrit la définition de cette limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap [0,1], ||f(x) - f(a)| - 0| \leq \varepsilon$$

En simplifiant $||f(x)-f(a)|-0|$ en $|f(x)-f(a)|$, on a exactement la définition de la continuité de f en a.

Par la question (i), f admet donc un point fixe p. Supposons par l'absurde qu'elle en admette un autre $p' \neq p$. Alors

$$\left|p - p'\right| = \left|f(p) - f(p')\right| \leq k \left|p - p'\right|.$$

Comme $p \neq p'$, on peut diviser par $|p-p'|$ pour trouver $k \geq 1$, ce qui contredit les hypothèses de l'énoncé.

(iii) On montre la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Comme $0 \leq p \leq 1$, on a $-1 \leq -p \leq 0$. On peut alors sommer cette inégalité avec $0 \leq u_0 \leq 1$:

$$-1 \leq u_0 - p \leq 1.$$

Autrement dit, $|u_0 - p| \leq 1$.
Hérédité. Supposons que $|u_n - p| \leq k^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$|u_{n+1} - p| = |f(u_n) - f(p)| \leq k\,|u_n - p| = k \times k^n = k^{n+1}.$$

Rappelons que $0 < k < 1$. Donc la suite $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi, par théorème des encadrements, la suite $(|u_n - p|)_{n\in\mathbb{N}}$ tends également vers 0. En écrivant la définition de cette limite, on voit que c'est équivalent à $\lim_{n\to+\infty} u_n = p$.

Solution 5. (i) On peut remarquer que $\sin^+$ et $\sin^-$ sont 2π-périodiques et donc limiter le tracé à $[0, 2\pi]$. Sur $[0, \pi]$, sin est positive, donc le tracé de $\sin^+$ est celui de sin et celui de $\sin^-$ est celui de la fonction nulle. Sur $[\pi, 2\pi]$, sin est négatif, donc le tracé de $\sin^+$ est celui de la fonction nulle et celui de $\sin^-$ est **le symétrique par rapport à l'axe des abscisses** de celui de sin (faites bien attention au fait que f^- est toujours positive !).

(ii) Il suffit de vérifier les égalités point par point. Soit $x \in \mathbb{R}$.

— Si $f(x) \geq 0$, alors

$$f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x),$$

et

$$f^+(x) + f^-(x) = f(x) + 0 = f(x) = |f(x)|.$$

— Si $f(x) \leq 0$, alors

$$f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x),$$

et

$$f^+(x) + f^-(x) = 0 + (-f(x)) = -f(x) = |f(x)|.$$

(iii) ($\Leftarrow$). Si f^+ et f^- sont continues, alors $f = f^+ - f^-$ est la somme de deux fonctions continues, donc est continue.
($\Rightarrow$). Si f est continue, alors par composition avec la fonction continue valeur absolue, $|f|$ est également continue. Remarquons que les égalités de la question précédente donne :

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \qquad f^+ = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Donc f^+ et f^- sont des sommes de fonctions continues. Elles sont donc toutes deux continues.

Solution 6.

Solution 7.

Solution 8. Il faut ici un peu d'astuce. Déjà, on décompose l'inégalité sur la valeur absolue en une inégalité double : on veut montrer que

$$g(a) - g(b) \leq f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a),$$

et on prouve les deux inégalités séparément (mais avec une même méthode).
Concentrons-nous d'abord sur l'inégalité de droite. Elle est équivalente à

$$g(a) - f(a) \leq g(b) - f(b).$$

Sous cette forme, on voit qu'il suffit de montrer que $g - f$ est croissante sur $[a, b]$.
Or, par hypothèse, on sait que

$$\forall x \in]a, b[, -g'(x) \leq f'(x) \leq g'(x).$$

L'inégalité de droite nous dit que $(g - f)'$ est positive sur $]a, b[$, i.e. que $g - f$ est croissante sur $[a, b]$.
L'autre inégalité se montre de la même façon en utilisant l'inégalité $-g' \leq f'$ de l'énoncé.

Il faut bien comprendre que le résultat de cet exercice est très naturel. Supposons que Francis et Gérard fasse la course en ligne droite. On note $f(t)$ la position (en mètres) de Francis à l'instant $t > 0$ par rapport à la ligne de départ, et $g(t)$ celle de Gérard. Alors, pour tout $t > 0$, $f'(t)$ est la vitesse instannée de Francis et $g'(t)$ celle de Gérard. Le résultat de l'exercice dit donc seulement que si Gérard court plus vite à tout instant que Francis, il arrivera sur la ligne d'arrivée avant Francis... Ce n'est pas sorcier !

Solution 9. Cet exercice était purement calculatoire et seulement destiné à combler 5 ou 10 minutes au besoin.

On peut commencer par dérivée f pour intuiter r et φ :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{e}^x \cos x - \mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x).$$

Il faut alors se rappeler son formulaire de trigonométrie : on a $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$ et $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{e}^x \sqrt{2}\left(\cos x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin x \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

On peut maintenant essayer de montrer par réccurence que $r = \sqrt{2}$ et $\varphi = \pi/4$ conviennent.
Initialisation. On vient de le faire pour $n = 1$.
Hérédité. Supposons avoir $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n \mathrm{e}^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right).$$

Alors, en dérivant une fois de plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) &= (\sqrt{2})^n \mathrm{e}^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) - (\sqrt{2})^n \mathrm{e}^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) \\ &= (\sqrt{2})^n \mathrm{e}^x \left(\cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)\right).\end{aligned}$$

La même formule que précédemment permet de conclure :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) &= (\sqrt{2})^n \mathrm{e}^x \sqrt{2}\left(\cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= (\sqrt{2})^{n+1} \mathrm{e}^x \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$