Solution de la question de cours 1. Soient $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_m)$ une base de G. On va montrer que

$$\mathscr{E} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$$

est une base de E.

Liberté. Soients $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in k$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j = 0.$$

Alors le vecteur

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = -\sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j$$

est élément de F (comme combinaison linéaire d'éléments de F) et de G (comme combinaison linéaire d'éléments de G). Or, par hypothèqe, $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$, donc $u = 0$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j = 0.$$

Les libertés de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{G}$ permettent de conclure :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \lambda_i = 0, \qquad \forall j \in \{1, \dots, m\},\ \mu_j = 0.$$

Caractère générateur. Soit $x \in \mathrm{E}$. Comme $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$, il existe $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$ tels que $x = f + g$. Le vecteur f se décompose sur la base $\mathscr{F}$ comme $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$. De même, le vecteur g se décompose sur la base $\mathscr{G}$ comme $g = \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j$. Alors, le vecteur x s'écrit

$$x = f + g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j,$$

et est donc dans $\mathrm{Vect}(\mathscr{E})$.

Solution de la question de cours 2. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une application linéaire de noyau nul. Soit $x, y \in \mathrm{E}$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors

$$0 = f(x) - f(y) = f(x - y).$$

Ceci montre $x - y \in ker f$, et donc $x - y = 0$. Autrement dit, $x = y$.
Réciproquement, supposons que $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une application linéaire injective. Alors $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ contient au plus un élément. On sait de plus que $0 \in \ker f$. Donc $\ker f = \{0\}$.

Solution de la question de cours 3. Supposons f injective. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de E. On cherche à montrer que $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ est libre dans F. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ tels que

$$\lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n) = 0.$$

Par linéarité de f, on a alors

$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = 0.$$

Donc $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \in \ker f$. Comme f injective, $\ker f = \{0\}$, donc

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0.$$

Par liberté de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$, on en déduit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Solution de la question de cours 4. Supposons f surjective. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E. On cherche à montrer que $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est génératrice de F. Soit $y \in \mathrm{F}$. Comme f est surjective, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$. Le caractère générateur de $(u_1, \ldots, u_n)$ fournit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ tel que

$$x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

On applique alors f et sa linéarité :

$$y = f(x) = f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n).$$

Solution 1. (i) *Unicité.* Soient φ et φ' deux applications vérifiant les hypothèses. On cherche à montrer $\varphi = \varphi'$. Soit $x \in \mathrm{E}$, s'écrivant sur la base $\mathscr{E}$ comme

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Alors, par linéarité de φ et φ',

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi'(e_i) = \varphi'(x).$$

Existence. La preuve de l'unicité donne une indication sur la définition de φ. On pose

$$\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F},\ x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

où x s'écrit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ sur la base $\mathscr{E}$. Une telle application φ est bien défini : tout x de E s'écrit de manière unique sur la base $\mathscr{E}$. Clairement, on a $\varphi(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Reste à montrer que φ est linéaire : soient $x, y \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in k$; on cherche à calculer $\varphi(\lambda x + \mu y)$, il nous faut donc écrire $\lambda x + \mu y$ dans la base $\mathscr{E}$; or, si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, on a

$$\lambda x + \mu y = \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) e_i,$$

ce qui montre que

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) f_i = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y).$$

(ii) Si φ est injective, alors $\mathscr{F}$ est l'image de la famille libre $\mathscr{E}$ par une application linéaire injective, et est donc elle-même libre.
Réciproquement, supposons $\mathscr{F}$ libre. Un élément $x \in \ker\varphi$ s'écrit $\sum_i \lambda_i e_i$ dans la base $\mathscr{E}$. Son image par φ est alors $0 = \sum_i \lambda_i f_i$. La liberté de $\mathscr{F}$ assure alors la nullité de tout les λ_i. Il suit que $x = 0$. Le noyau de φ est donc réduit au vecteur nul, en faisant une application injective.

(iii) Si φ est surjective, alors $\mathscr{F}$ est l'image de la famille génératrice $\mathscr{E}$ par une application linéaire surjective, et est donc elle-même génératrice.

Réciproquement, supposons $\mathscr{F}$ génératrice. Tout élément $y \in \mathrm{F}$ s'écrit donc sur $\mathscr{F}$ comme $\sum_i \lambda_i f_i$. Comme $f_i = \varphi(e_i)$, et par linéarité de φ, il vient que

$$y = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) \in \operatorname{im}\varphi.$$

Ainsi, $\operatorname{im}\varphi = \mathrm{F}$, et donc φ est surjective.

Question bonus. L'application $\mathrm{E} \to k^n$ qui a tout x associe ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ est l'application φ de la question (i) dans le cas $\mathscr{E} = \mathscr{B}$ et $\mathscr{F}$ la famille des

$$f_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{position i}}, 0, \dots, 0), \qquad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Solution 2. Les deux questions sont résolues par le théorème du rang. En effet, d'après celui-ci, on a :

$$\dim \mathrm{E} = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f).$$

Ainsi,

(i) si f est injective, alors $\ker f = \{0\}$ et donc $\dim \mathrm{E} = \dim(\operatorname{im} f)$; comme de plus, $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}$, on a que le sous-espace $\operatorname{im} f$ de F a même dimension que F lui-même, donc $\operatorname{im} f = \mathrm{F}$; autrement dit f surjective ;

(ii) si f est surjective, alors $\operatorname{im} f = \mathrm{F}$ et en particulier, $\dim(\operatorname{im} f) = \dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}$, ce qui implique $\dim(\ker f) = 0$; le seul espace vectoriel de dimension nulle est $\{0\}$, donc $\ker f = \{0\}$; autrement dit, f injective.

Solution 3. Les questions de cet exercice sont essentiellement creuses et servent seulement de prétexte pour manipuler les propriétés des applications linéaires.

(i) Soit $x \in \ker f$. Par définition, $f(x) = 0$. Or toute application linéaire envoie le vecteur nul sur le vecteur nul : ainsi $g(f(x)) = 0$. Donc $x \in \ker(g \circ f)$.

Soit $y \in \operatorname{im}(g \circ f)$. Par définition, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $g(f(x)) = y$. En notant $x' = f(x)$, on a donc $y = g(x')$, ce qui montre $y \in \operatorname{im} g$.

(ii) On procède par double inclusion.

Soit $y \in \ker g \cap \operatorname{im} f$. Comme $y \in \operatorname{im}$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$. De plus, $g(y) = 0$, donc $g(f(x)) = 0$. Ainsi $y = f(x)$ avec $x \in \ker(g \circ f)$: c'est exactement la définition de $y \in f(\ker(g \circ f))$.

Soit $y \in f(\ker(g \circ f))$. Par définition, il existe $x \in \ker(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$. Ceci montre déjà $y \in \operatorname{im} f$. De plus, $g(f(x)) = 0$, et comme $y = f(x)$, on a $g(y) = 0$. Autrement dit $y \in ker g$. Finalement, $y \in \ker g \cap \operatorname{im} f$.

(iii) Soit $x \in \ker g$. Il s'agit de montrer que $f(x) \in \ker g$. Or

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 0.$$

Soit $y \in \operatorname{im} g$. Il s'agit de montrer qye $f(y) \in \operatorname{im} g$. Par définition, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = g(x)$. Alors

$$f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Notant $x' = f(x)$, on a donc $f(y) = g(x')$, ce qui montre $f(y) \in \operatorname{im} g$.

Solution 4. (i) Soient $f, g \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{D}(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = (\lambda f)' + g'.$$

Le scalaire λ s'identifie à la fonction constante λ, de dérivée nulle, d'où

$$\mathrm{D}(\lambda f + g) = \lambda f' + g' = \lambda \mathrm{D}(f) + \mathrm{D}(g).$$

(ii) Soit $f \in \ker \mathrm{D}$: f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de dérivée nulle, c'est-à-dire une fonction constante. Réciproquement, toute fonction constante est bien de dérivée nulle. Donc

$$\ker \mathrm{D} = \mathrm{Vect}(x \mapsto 1).$$

Pour trouver $\mathrm{im}\, \mathrm{D}$, il faut faire preuve d'un peu plus d'initiative. Quelles sont les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui sont des dérivées ? La réponse est toutes ! En effet, si $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, en particulier, f est continue et on peut donc former la fonction $g : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. La fonction g est par définition dérivable de dérivée f : c'est donc bien une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\mathrm{D}(g) = f$. Ainsi :

$$\mathrm{im}\, \mathrm{D} = \mathrm{E}.$$

Remarque : on pourrait trouver cela choquant de trouver un endomorphisme surjectif mais non injectif. Cela arrive en effet peu dans la pratique. En fait, cela n'arrive jamais en dimension **finie** *: le théorème du rang assure qu'un endomorphisme est injectif si et seulement s'il est surjectif. Mais l'on est ici en dimension infinie, donc les argument de type « rang » ne s'appliquent pas !*

(iii) Soit $f \in \mathrm{F}$. Par définition, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f = \alpha \sin + \beta \cos$. On peut alors calculer son image par D :

$$\mathrm{D}(f) = \alpha \sin' + \beta \cos' = \alpha \cos - \beta \sin \in \mathrm{F}.$$

Solution 5. (i) Soient $u = (x, y), v = (x', y') \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
r_\vartheta(\lambda u + v) &= r_\vartheta(\lambda x + x', \lambda y + y') \\
&= \big(\cos\vartheta(\lambda x + x') - \sin\vartheta(\lambda y + y'), \sin\vartheta(\lambda x + x') + \cos\vartheta(\lambda y + y')\big) \\
&= \big(\lambda \cos\vartheta x + \cos\vartheta x' - \lambda \sin\vartheta y - \sin\vartheta y', \lambda \sin\vartheta x + \sin\vartheta x' + \lambda \cos\vartheta y + \cos\vartheta y'\big) \\
&= \lambda(\cos\vartheta x - \sin\vartheta y, \sin\vartheta x + \cos\vartheta y) + (\cos\vartheta x' - \sin\vartheta y', \sin\vartheta x' + \cos\vartheta y') \\
&= \lambda r_\vartheta(x, y) + r_\vartheta(x', y').
\end{aligned}$$

(ii) Soit $(x, y) \in \mathrm{E}$. Alors

$$r_\vartheta(x, y) = 0 \iff \big\{ \cos\vartheta x - \sin\vartheta y = 0 \sin\vartheta x + \cos\vartheta y = 0$$

On pourrait résoudre le système, mais on va déjà être amené à le faire dans la prochaine question. Voici une méthode plus maligne. Le point $(x, y) \in \mathrm{E}$ est donc le point d'intersection de deux droites dans le plan donc les équations sont de la forme $\alpha x + \beta y = 0$. Toutes les droites avec une équation de cette forme passent par 0 (puisque $(0, 0)$ vérifie l'équation). Le seul point d'intersection de deux telles droites est donc le vecteur nul. Ainsi, $x = y = 0$. Autrement dit :

$$\ker r_\vartheta = \{0\}.$$

Ainsi, r_ϑ est injective. On applique alors le théorème du rang : $\dim(\ker r_\vartheta) + \dim(\operatorname{im} r_\vartheta) = \dim \mathrm{E} = 2$. Comme le noyau de r_ϑ est réduit au vecteur nul, on a donc $\dim(\operatorname{im} r_\vartheta) = 2$. Le seul sous-espace de E de dimension 2 est E lui-même, donc r_ϑ est surjective.

(iii) Soit $(x, y) \in \mathrm{E}$ et notons $(x', y') = r_\vartheta(x, y)$. On aura trouver une expression de ${r_\vartheta}^{-1}$ si l'on est capable d'exprimer (x, y) en fonction de (x', y'). Pour cela, il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} \cos(\vartheta)x - \sin(\vartheta)y = x' \\ \sin(\vartheta)x + \cos(\vartheta)y = y' \end{cases}$$

En dénotant L_1 la première ligne et L_2 la deuxième ligne, les opérations

$$\mathrm{L}_1 \leftarrow \cos(\vartheta)\mathrm{L}_1 + \sin(\vartheta)\mathrm{L}_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \cos(\vartheta)\mathrm{L}_2 - \sin(\vartheta)\mathrm{L}_1$$

mènent au système

$$\begin{cases} x = \cos(\vartheta)x' + \sin(\vartheta)y' \\ y = -\sin(\vartheta)x' + \cos(\vartheta)y' \end{cases}$$

Rappelons alors que $\cos(\vartheta) = \cos(-\vartheta)$ et que $-\sin(\vartheta) = \sin(-\vartheta)$. Le système se réécrit alors en

$$\begin{cases} x = \cos(-\vartheta)x' - \sin(-\vartheta)y' \\ y = \sin(-\vartheta)x' + \cos(-\vartheta)y' \end{cases}$$

Finalement, ${r_\vartheta}^{-1} = r_{-\vartheta}$.

Solution 6. (i) L'ensemble $\mathrm{E} \to k$ des fonctions k^{E} est un k-espace vectoriel. On montre que E^* en est un sous-espace vectoriel :

— l'application nulle est linéaire,

— pour $\lambda \in k$ et $f, g \in \mathrm{E}^*$, il faut montrer que $\lambda f + g$ est linéaire : si $x, y \in \mathrm{E}$ et $\mu \in k$, alors

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)(\mu x + y) &= \lambda f(\mu x + y) + g(\mu x + y) \\ &= \lambda(\mu f(x) + f(y)) + \mu g(x) + g(y) \\ &= \mu(\lambda f(x) + g(x)) + \lambda f(y) + g(y) \\ &= \mu(\lambda f + g)(x) + (\lambda f + g)(y).\end{aligned}$$

(ii) Soient $\lambda \in k$ et $x, y \in \mathrm{E}$. On écrit x et y sur la base $\mathscr{E}$ comme :

$$x = \sum_i x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_i y_i e_i.$$

Alors

$$\lambda x + y = \lambda \sum_i x_i e_i + \sum_i y_i e_i = \sum_i (\lambda x_i + y_i) e_i.$$

On a donc $e_i^*(\lambda x + y) = \lambda x_i + y_i = \lambda e_i^*(x) + e_i^*(y)$.

(iii) Le nombre $e_i^*(e_j)$ est la i-ième coordonnée de e_j sur la base $\mathscr{E}$. Mais par définition les coordonnées de e_j sur $\mathscr{E}$ sont tout 0 sauf la j-ième qui est 1. Donc

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Commençons par la liberté. Soient $\mu_1, \dots, \mu_n \in k$ tels que

$$\mu_1 e_1^* + \cdots + \mu_n e_n^* = 0.$$

C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a l'égalité :

$$\mu_1 e_1^*(x) + \cdots + \mu_n e_n^*(x) = 0.$$

En particulier, pour $x = e_j$, d'après la question précédente, on obtient : $\mu_j = 0$. Et ce pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, donc $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$.

Passons au caractère générateur. Soit $f \in \mathrm{E}^*$.
Analyse. Supposons qu'on ait des scalaires $\mu_1, \dots, \mu_n \in k$ tels que

$$f = \mu_1 e_1^* + \cdots + \mu_n e_n^*.$$

Alors $f(e_j) = \mu_j$.
Synthèse. Montrons que $f = \sum_i f(e_i) e_i^*$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on écrit $x = \sum_j x_j e_j$ sur la base $\mathscr{E}$ et donc

$$\begin{aligned}
\left(\sum_i f(e_i) e_i^*\right)(x) &= \left(\sum_i f(e_i) e_i^*\right)\left(\sum_j x_j e_j\right) \\
&= \sum_i \sum_j f(e_i) x_j e_i^*(e_j) \\
&= \sum_i f(e_i) x_i \\
&= f\left(\sum_i x_i e_i\right) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Solution 7. (i) Soit f une homothétie. Par définition, il existe un scalaire $\lambda \in k$ tel que $\forall x \in \mathrm{E}, f(x) = \lambda x$. Alors pour tous $\mu, \nu \in k$ et tous $x, y \in \mathrm{E}$,

$$f(\mu x + \nu y) = \lambda(\mu x + \nu y) = \lambda\mu x + \lambda\nu y = \mu\lambda x + \nu\lambda y = \mu f(x) + \nu f(y).$$

Ainsi toute homothétie est linéaire.
Soit f une homothétie de rapport λ et D une droite vectorielle de E. Si $\lambda = 0$, alors clairement $f(\mathrm{D}) = \{0\}$. Sinon on va montrer que $f(\mathrm{D}) = \mathrm{D}$. La droite vectorielle D est un sous-espace de E de dimension 1, donc il existe $u \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}(u)$. Si $x \in \mathrm{D}$, c'est qu'il existe $\alpha \in k$ tel que $x = \alpha u$: donc $f(x) = \lambda\alpha u \in \mathrm{D}$; réciproquement,

$$x = \lambda \frac{\alpha}{\lambda} u = f\left(\frac{\alpha}{\lambda} u\right) \in f(\mathrm{D}).$$

(ii) (a) Soit $a \in \mathrm{E}$. Si on note D_a la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(a)$, par hypothèse $f(\mathrm{D}_a) = \mathrm{D}_a$. En particulier, $f(a) \in \mathrm{D}_a$. C'est-à-dire qu'il existe une scalaire λ_a tel que $f(a) = \lambda_a a$.

(b) La question précédente et la linéarité de f permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\lambda_{e_1+\cdots+e_n}e_1+\cdots+\lambda_{e_1+\cdots+e_n}e_n &= \lambda_{e_1+\cdots+e_n}(e_1+\cdots+e_n)\\ &= f(e_1+\cdots+e_n)\\ &= f(e_1)+\cdots+f(e_n)\\ &= \lambda_{e_1}e_1+\cdots+\lambda_{e_n}e_n.\end{aligned}$$

Or $\mathscr{B}$ est une base, donc on peut identifier coefficients par coefficients :

$$\lambda_{e_1}=\cdots=\lambda_{e_n}=\lambda_{e_1+\cdots+e_n}.$$

On note λ ce scalaire pour plus de simplicité. Alors, par définition des λ_{e_k}, on a $\forall k\in\{1,\dots,n\}, f(e_k)=\lambda e_k$.
On montre alors que pour tout $x\in\mathrm{E}$, $f(x)=\lambda x$. Soit $x\in\mathrm{E}$, qu'on écrit $x=\sum_k \mu_k e_k$ sur la base $\mathscr{B}$: alors

$$f(x)=\sum_{k=1}^n \mu_k f(e_k)=\sum_{k=1}^n \mu_k\lambda e_k=\lambda\sum_{k=1}^n \mu_k e_k=\lambda x.$$

Solution 8. (i) Il s'agit de montrer que pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et tous $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on a $(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})'=\lambda\mathrm{P}'+\mu\mathrm{Q}'$. Notons

$$\mathrm{P}=a_n\mathrm{X}^n+\cdots+a_0,\qquad \mathrm{Q}=b_n\mathrm{X}^n+\cdots+b_0.$$

Alors

$$\begin{aligned}(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})' &= ((\lambda a_n+\mu b_n)\mathrm{X}^n+\cdots+(\lambda a_0+\mu b_0))'\\ &= n(\lambda a_n+\mu b_n)\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+(\lambda a_1+\mu b_1)\\ &= \lambda(na_n\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+a_1)+\mu(nb_n\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+b_1)\\ &= \lambda\mathrm{P}'+\mu\mathrm{Q}'.\end{aligned}$$

(ii) Soit $\mathrm{P}=a_n\mathrm{X}^n+\cdots+a_0\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Alors

$$\mathrm{P}'=0 \iff na_n\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+a_1=0 \iff a_n=\cdots=a_1=0.$$

Donc $\mathrm{P}=a_0$. Ainsi, $\ker\mathrm{D}$ est l'ensemble des polynômes constants, i.e. $\ker\mathrm{D}=\mathrm{Vect}(1)$.
On applique maintenant le théorème du rang :

$$\dim(\ker\mathrm{D})+\dim(\operatorname{im}\mathrm{D})=\dim(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]).$$

Grâce au début de la question, on sait que $\ker\mathrm{D}$ est de dimension 1. De plus, $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ admet $(1,\mathrm{X},\dots,\mathrm{X}^n)$ comme base et est donc de dimension $n+1$. Donc $\operatorname{im}\mathrm{D}$ est de dimension n.

(iii) On va maintenant montrer que $\operatorname{im}\mathrm{D}=\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Si $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, sa dérivée est par définition de degré $\deg\mathrm{P}-1\leq n-1$. Réciproquement, tout polynôme $a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+a_0$ de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ est la dérivée du polynôme

$$\frac{a_{n-1}}{n}\mathrm{X}^n+\frac{a_{n-2}}{n-1}\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+a_0\mathrm{X}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}].$$

Ainsi, $\dim(\operatorname{im}\mathrm{D})=\dim(\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}])=n$.

Solution 9. (i) Soient $\lambda, \mu \in k$ et $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathrm{E}$. Alors :

$$\begin{aligned} u \cdot (\lambda x + \mu y) &= u_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + u_n(\lambda x_n + \mu y_n) \\ &= \lambda(u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n) + \mu(u_1 y_1 + \cdots + u_n y_n) \\ &= \lambda(u \cdot x) + \mu(u \cdot y). \end{aligned}$$

(ii) Il suffit de remarquer que, par définition même, $u^\perp = \ker(f_u)$. Or le noyau d'une application linéaire est toujours un sous-espace vectoriel du domaine de l'application. Donc $u^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

(iii) On commence par traiter le cas $u = 0$: si $u = 0$, alors f_u est l'application nulle, donc son noyau $u^\perp$ est E lui-même. Ainsi $\dim(u^\perp) = n$ et un supplémentaire est $\{0\}$.

Supposons maintenant $u \neq 0$. Le calcul de $\dim u^\perp$ est le calcul de la dimension d'un noyau. Tout naturellement, on utilise le théorème du rang :

$$\dim(u^\perp) + \dim(\operatorname{im} f_u) = \dim \mathrm{E} = n.$$

L'espace vectoriel $\operatorname{im} f_u \subseteq \mathbb{R}$ est soit de dimension nulle, soit de dimension 1. Or, comme $u \neq 0$, $u \cdot u \neq 0$: c'est-à-dire que $\operatorname{im} f_u$ contient un élément non nul. Ainsi $\dim(\operatorname{im} f_u) = 1$. Donc $\dim(u^\perp) = n - 1$. (On dit que $u^\perp$ est un *hyperplan*.)

Il s'agit maintenant de trouver un supplémentaire de $u^\perp$. Comme la dimension de $u^\perp$ est $n-1$, un supplémentaire est nécessairement de dimension 1, c'est-à-dire une droite vectorielle. On doit donc trouver un vecteur $v \in \mathrm{E}$ tel que

$$u^\perp \oplus \operatorname{Vect}(v) = \mathrm{E}.$$

On n'a pas vraiment l'embarras du choix, le seul vecteur particulier de l'exercice étant le vecteur u. On peut également faire un dessin en dimension 2 ou 3 pour se rendre compte que le choix $v = u$ est raisonnable. Notons $\mathrm{D}_u = \operatorname{Vect}(u)$.

On doit donc maintenent montrer deux choses : d'une part $u^\perp \cap \mathrm{D}_u = \{0\}$, et d'autre part $u^\perp + \mathrm{D}_u = \mathrm{E}$.

- soit $x \in u^\perp \cap \mathrm{D}_u$. Alors, puisque $u \in \mathrm{D}_u$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u$. Et comme $x \in u^\perp$, on a :

  $$0 = u \cdot x = u \cdot (\lambda u) = \lambda(u \cdot u) = \lambda(u_1^2 + \cdots + u_n^2).$$

  Comme $u \neq 0$, alors $u_1^2 + \cdots + u_n^2 \neq 0$. Donc $\lambda = 0$, c'est-à-dire que $x = \lambda u$ est le vecteur nul.

- On procède ici par analyse-synthèse. Soit $x \in \mathrm{E}$, on cherche à écrire :

  $$x = \lambda u + y$$

  avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in u^\perp$.
  Analyse. Si $x = y + \lambda u$ avec $y \in u^\perp$, on a notamment :

  $$u \cdot (x - \lambda u) = 0.$$

De plus, comme déjà remarqué, $u \neq 0$ entraîne $u \cdot u \neq 0$. Donc :

$$\lambda = \frac{u \cdot x}{u \cdot u}.$$

Synthèse. On pose $\lambda = (u \cdot x)/(u \cdot u)$ et $y = x - \lambda u$. Alors clairement $x = \lambda u + y$ et

$$u \cdot y = u \cdot x - \lambda u \cdot u = 0.$$

Donc $y \in u^{\perp}$.

Solution 10. (i) a. Soit $x_0 \notin \ker f$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'image de $(f(x)/f(x_0))x_0$ par f est

$$f\left(\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) = \frac{f(x)}{f(x_0)}f(x_0) = f(x).$$

b. Grâce à la question précédente, on va montrer que $\ker f \oplus \mathrm{Vect}(x_0) = \mathrm{E}$. Si $x \in \ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0)$, c'est que d'une part $f(x) = 0$ et d'autre part $x = \lambda x_0$ pour un $\lambda \in k$. Alors $\lambda f(x_0) = 0$ et comme $x_0 \notin \ker f$, on en déduit $\lambda = 0$ et donc $x = 0$. Ceci montre $\ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0) = \{0\}$.

Soit $x \in \mathrm{E}$ quelconque. On cherche à l'écrire comme somme d'un élément de $\ker f$ et d'un multiple de x_0. Or la question précédente donne un multiple de x_0 ayant la même image que x par f. On écrit donc :

$$x = \underbrace{x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in \ker f} + \underbrace{\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in \mathrm{Vect}(x_0)}.$$

Ceci montre $\mathrm{E} = \ker f + \mathrm{Vect}(x_0)$.

c. Comme $x_0 \neq 0$, l'espace $\mathrm{Vect}(x_0)$ est de dimension 1. Donc :

$$\dim(\ker f) = \dim \mathrm{E} - 1.$$

(ii) On peut appliquer le théorème du rang à $f : \mathrm{E} \to k$:

$$\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{im} f) = \dim \mathrm{E}.$$

En déterminant $\dim(\mathrm{im} f)$, on pourra en déduire $\dim(\ker f)$. Or $\mathrm{im} f$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel bien particulier k. Notamment k est de dimension 1. Donc $\mathrm{im} f$ ne peut être que de dimension 0 ou 1. Mais f n'est pas l'application nulle par ypothèse, ce qui s'écrit $\mathrm{im} f \not\subseteq \{0\}$. Ainsi, $\mathrm{im} f$ n'est pas de dimension 0 : c'est donc qu'il est de dimension 1. On en déduit :

$$\dim(\ker f) = \dim \mathrm{E} - 1.$$