Solution de la question de cours 1. Soient $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_m)$ une base de G. On va montrer que

$$\mathscr{E} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$$

est une base de E.

Liberté. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in k$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j = 0.$$

Alors le vecteur

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = -\sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j$$

est élément de F (comme combinaison linéaire d'éléments de F) et de G (comme combinaison linéaire d'éléments de G). Or, par hypothèqe, $F \cap G = \{0\}$, donc $u = 0$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0,$$
$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j = 0.$$

Les libertés de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{G}$ permettent de conclure :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \lambda_i = 0, \qquad \forall j \in \{1, \dots, m\},\ \mu_j = 0.$$

Caractère générateur. Soit $x \in E$. Comme $E = F + G$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$. Le vecteur f se décompose sur la base $\mathscr{F}$ comme $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$. De même, le vecteur g se décompose sur la base $\mathscr{G}$ comme $g = \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j$. Alors, le vecteur x s'écrit

$$x = f + g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j,$$

et est donc dans $\mathrm{Vect}(\mathscr{E})$.

Solution de la question de cours 2. Soit $f : E \to F$ est une application linéaire de noyau nul. Soit $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors

$$0 = f(x) - f(y) = f(x - y).$$

Ceci montre $x - y \in ker f$, et donc $x - y = 0$. Autrement dit, $x = y$.
Réciproquement, supposons que $f : E \to F$ est une application linéaire injective. Alors $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ contient au plus un élément. On sait de plus que $0 \in \ker f$. Donc $\ker f = \{0\}$.

Solution de la question de cours 3. (i) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0.$$

Prenons l'image par f :

$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = 0.$$

$$\lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n) = 0.$$

Or $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

(ii) Supposons f injective. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de E. On cherche à montrer que $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre dans F. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ tels que

$$\lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n) = 0.$$

Par linéarité de f, on a alors

$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = 0.$$

Donc $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \in \ker f$. Comme f injective, $\ker f = \{0\}$, donc

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0.$$

Par liberté de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$, on en déduit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

(iii) Supposons f surjective. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E. On cherche à montrer que $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est génératrice de F. Soit $y \in$ F. Comme f est surjective, il existe $x \in$ E tel que $f(x) = y$. Le caractère générateur de $(u_1, \ldots, u_n)$ fournit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ tel que

$$x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

On applique alors f et sa linéarité :

$$y = f(x) = f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n).$$

Solution 1. (i) Si f est un isomorphisme, c'est en particulier une bijection. Donc, d'une part f est injective et donc $\ker f = 0$, et d'autre part f est surjective et donc $\operatorname{im} f = \mathrm{F}$.

Réciproquement, si $\ker f = 0$ et $\operatorname{im} f = \mathrm{F}$, alors f est injective et surjective. Donc f est bijective. On note g la bijection inverse. On va maintenant prouver que g est linéaire : soient $\lambda, \mu \in k$ et $x, y \in$ F, alors

$$\begin{aligned} g(\lambda x + \mu y) &= g\left(\lambda f(g(x)) + \mu f(g(y))\right) \\ &= g\left(f(\lambda g(x) + \mu g(y))\right) \\ &= \lambda g(x) + \mu g(y). \end{aligned}$$

(ii) Si f est un isomorphisme, f est d'une part injective donc envoie les familles libres sur des familles libres, et est surjective d'autre part donc envoie les familles génératrices sur des familles génératrices. En particulier, l'image d'une base par f est une base.

Réciproquement, supposons que $f(\mathscr{E})$ est une base de F. Soit $x \in \ker f$: on peut l'écrire sur la base $\mathscr{E}$ comme

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Alors, par linéarité de f, on a

$$0 = f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n).$$

Par liberté de $f(\mathscr{E})$, on en conclut que $x = 0$. Ainsi $\ker f = \{0\}$. De plus, si $y \in \mathrm{F}$, on peut l'écrire sur la base $f(\mathscr{E})$ comme

$$y = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n).$$

La linéarité de f assure alors que y est l'image par f de $\sum_i \lambda_i e_i$. Ainsi, $\operatorname{im} f = \mathrm{F}$. Grâce à la première question, on en déduit que f est un isomorphisme.

(iii) S'il existe un isomorphisme $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$, la question précédente assure qu'il existe une base de F de même cardinal qu'une base de E. Donc $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$.

Question bonus. Si $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F} = n$, c'est qu'il existe une base $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et une base $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ de F. On définit alors l'application

$$f : \mathrm{E} \to \mathrm{F},\ x \mapsto \sum_i x_i f_i$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{E}$. On vérifie facilement que f est bien définie et linéaire. On applique ensuite la question (ii) pour voir que c'est un isomorphisme.

Solution 2. (i) *Unicité.* Soient φ et φ' deux applications vérifiant les hypothèses. On cherche à montrer $\varphi = \varphi'$. Soit $x \in \mathrm{E}$, s'écrivant sur la base $\mathscr{E}$ comme

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Alors, par linéarité de φ et φ',

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi'(e_i) = \varphi'(x).$$

Existence. La preuve de l'unicité donne une indication sur la définition de φ. On pose

$$\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F},\ x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

où x s'écrit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ sur la base $\mathscr{E}$. Une telle application φ est bien défini : tout x de E s'écrit de manière unique sur la base $\mathscr{E}$. Clairement, on a $\varphi(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Reste à montrer que φ est linéaire : soient $x, y \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in k$; on cherche à calculer $\varphi(\lambda x + \mu y)$, il nous faut donc écrire $\lambda x + \mu y$ dans la base $\mathscr{E}$; or, si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, on a

$$\lambda x + \mu y = \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) e_i,$$

ce qui montre que

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) f_i = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y).$$

(ii) Si φ est injective, alors $\mathscr{F}$ est l'image de la famille libre $\mathscr{E}$ par une application linéaire injective, et est donc elle-même libre.

Réciproquement, supposons $\mathscr{F}$ libre. Un élément $x \in \ker\varphi$ s'écrit $\sum_i \lambda_i e_i$ dans la base $\mathscr{E}$. Son image par φ est alors $0 = \sum_i \lambda_i f_i$. La liberté de $\mathscr{F}$ assure alors la nullité de tout les λ_i. Il suit que $x = 0$. Le noyau de φ est donc réduit au vecteur nul, en faisant une application injective.

(iii) Si φ est surjective, alors $\mathscr{F}$ est l'image de la famille génératrice $\mathscr{E}$ par une application linéaire surjective, et est donc elle-même génératrice.

Réciproquement, supposons $\mathscr{F}$ génératrice. Tout élément $y \in \mathrm{F}$ s'écrit donc sur $\mathscr{F}$ comme $\sum_i \lambda_i f_i$. Comme $f_i = \varphi(e_i)$, et par linéarité de φ, il vient que

$$y = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) \in \operatorname{im}\varphi.$$

Ainsi, $\operatorname{im}\varphi = \mathrm{F}$, et donc φ est surjective.

Question bonus. L'application $\mathrm{E} \to k^n$ qui a tout x associe ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ est l'application φ de la question (i) dans le cas $\mathscr{E} = \mathscr{B}$ et $\mathscr{F}$ la famille des

$$f_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{position i}}, 0, \dots, 0), \qquad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Solution 3. (i) Cette question n'est pas utilisée *per se* dans la suite. Elle est là pour donner une idée de ce qui se passe dans le cas d'une application nilpotente.

Supposons par l'absurde qu'il y ait un $k < p$ tel que $f^k = 0$. Alors pour toute application linéaire $g : k^n \to k^n$, on a $g \circ f^k = 0$. En particulier pour $g = f^{p-1-k}$. Ce qui mène $f^{p-1} = 0$, contredisant les hypothèses de l'exercice.

(ii) Soit $x_0 \notin \ker(f^{p-1})$. On va montrer que ce x_0 convient. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in k$ tels que

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0.$$

Supposons par l'absurde que le vecteur $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1})$ est non nul. Alors on note i_0 le plus petit indice $i \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Alors, on peut réécrire l'équation ci-dessus

$$\lambda_{i_0} f^{i_0}(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0$$

et en prendre l'image par f^{p-1-i_0}, menant à

$$\lambda_{i_0} f^{p-1}(x_0) + \lambda_{i_0+1} f^{p}(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{2p-2-i_0}(x_0) = 0.$$

Or $f^p = 0$ donc $f^k = 0$ pour tout $k \geq p$. Ainsi, l'équation se réduit à :

$$\lambda_{i_0} f^{p-1}(x_0) = 0.$$

Comme de plus $x_0 \notin \ker(f^{p-1})$, on en déduit $\lambda_{i_0} = 0$, ce qui contredit la définition même de λ_{i_0}.

(iii) Pour chaque élément de la base $\mathscr{B}$, son image par f est le vecteur suivant dans la base, sauf pour $f^{p-1}(x_0)$ dont l'image est nulle. Donc les coordonnées de l'image par f de $f^i(x_0), i \in \{0, \dots, p-2\}$ dans la base $\mathscr{B}$ sont

$$(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{position } i+2}, 0, \dots, 0),$$

et celles de l'image par f de $f^{p-1}(x_0)$ sont $(0,\dots,0)$.
Remarque : cette question peut sembler saugrenue de prime abord mais prendra tout son sens quand vous parlerez en cours de matrice d'une application linéaire dans des bases données.

Solution 4.

Solution 5. (i) Soient $\lambda,\mu \in k$ et $x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)\in \mathrm{E}$. Alors :

$$\begin{aligned} u\cdot(\lambda x+\mu y) &= u_1(\lambda x_1+\mu y_1)+\cdots+u_n(\lambda x_n+\mu y_n) \\ &= \lambda(u_1x_1+\cdots+u_nx_n)+\mu(u_1y_1+\cdots+u_ny_n) \\ &= \lambda(u\cdot x)+\mu(u\cdot y). \end{aligned}$$

(ii) Il suffit de remarquer que, par définition même, $u^\perp=\ker(f_u)$. Or le noyau d'une application linéaire est toujours un sous-espace vectoriel du domaine de l'application. Donc $u^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

(iii) Pour cette question, il peut être utile de faire un dessin en petite dimension ($n=2$ ou 3). En dimension 3 par exemple, on s'aperçoit que $u^\perp$ est le plan orthogonal à la droite dirigée par u.
On s'appuie sur cette intuition pour essayer de montrer que la droite vectorielle $\mathrm{D}_u=\mathrm{Vect}(u)$ est un supplémentaire de $u^\perp$. On doit pour cela montrer deux choses : d'une part $u^\perp\cap \mathrm{D}_u=\{0\}$, et d'autre part $u^\perp+\mathrm{D}_u=\mathrm{E}$.

— soit $x\in u^\perp\cap\mathrm{D}_u$. Alors, puisque $u\in\mathrm{D}_u$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $x=\lambda u$. Et comme $x\in u^\perp$, on a :

$$0=u\cdot x=u\cdot(\lambda u)=\lambda(u\cdot u)=\lambda(u_1^2+\cdots+u_n^2).$$

Comme $u\neq 0$, alors $u_1^2+\cdots+u_n^2\neq 0$. Donc $\lambda=0$, c'est-à-dire que $x=\lambda u$ est le vecteur nul.

— On procède ici par analyse-synthèse. Soit $x\in\mathrm{E}$, on cherche à écrire :

$$x=\lambda u+y$$

avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $y\in u^\perp$.
Analyse. Si $x=y+\lambda u$ avec $y\in u^\perp$, on a notamment :

$$u\cdot(x-\lambda u)=0.$$

De plus, comme déjà remarqué, $u\neq 0$ entraîne $u\cdot u\neq 0$. Donc :

$$\lambda=\frac{u\cdot x}{u\cdot u}.$$

Synthèse. On pose $\lambda=(u\cdot x)/(u\cdot u)$ et $y=x-\lambda u$. Alors clairement $x=\lambda u+y$ et

$$u\cdot y=u\cdot x-\lambda u\cdot u=0.$$

Donc $y\in u^\perp$.

Solution 6.

Solution 7. (i) (a) Soit $x_0 \notin \ker f$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'image de $(f(x)/f(x_0))x_0$ par f est

$$f\left(\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) = \frac{f(x)}{f(x_0)}f(x_0) = f(x).$$

(b) Grâce à la question précédente, on va montrer que $\ker f \oplus \mathrm{Vect}(x_0) = \mathrm{E}$. Si $x \in \ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0)$, c'est que d'une part $f(x) = 0$ et d'autre part $x = \lambda x_0$ pour un $\lambda \in k$. Alors $\lambda f(x_0) = 0$ et comme $x_0 \notin \ker f$, on en déduit $\lambda = 0$ et donc $x = 0$. Ceci montre $\ker f \cap \mathrm{Vect}(x_0) = \{0\}$.

Soit $x \in \mathrm{E}$ quelconque. On cherche à l'écrire comme somme d'un élément de $\ker f$ et d'un multiple de x_0. Or la question précédente donne un multiple de x_0 ayant la même image que x par f. On écrit donc :

$$x = \underbrace{x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in \ker f} + \underbrace{\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}_{\in \mathrm{Vect}(x_0)}.$$

Ceci montre $\mathrm{E} = \ker f + \mathrm{Vect}(x_0)$.

(c) Comme $x_0 \neq 0$, l'espace $\mathrm{Vect}(x_0)$ est de dimension 1. Donc :

$$\dim(\ker f) = \dim \mathrm{E} - 1.$$

(ii) Si f et f' sont multiple l'une de l'autre, c'est qu'il existe $\lambda \in k^\times$ tels que $f' = \lambda f$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$f'(x) = 0 \iff \lambda f(x) = 0 \iff f(x) = 0.$$

Autrement dit, $\ker f = \ker f'$.

Réciproquement, supposons $\ker f = \ker f'$. On décompose E comme $\ker f \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$ pour un certain $x_0 \notin \ker f$. Notons $\lambda = f'(x_0)/f(x_0)$. Alors $f' = \lambda f$: en effet, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on écrit $x = y_x + \lambda_x x_0$ avec $y_x \in \ker f$, et on a alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \underbrace{f'(y_x)}_{=0} + \lambda_x f'(x_0) \\
&= \lambda_x \lambda f(x_0) \\
&= \lambda \underbrace{f(y_x)}_{=0} + \lambda\lambda_x f(x_0) \\
&= \lambda\left(f(y_x) + \lambda_x f(x_0)\right) \\
&= \lambda f(x).
\end{aligned}$$

Solution 8. (i) Il s'agit de montrer que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, on a $(\lambda \mathrm{P} + \mu \mathrm{Q})' = \lambda \mathrm{P}' + \mu \mathrm{Q}'$. Notons

$$\mathrm{P} = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d, \qquad \mathrm{Q} = e\mathrm{X}^3 + f\mathrm{X}^2 + g\mathrm{X} + h.$$

Alors

$$\begin{aligned}
(\lambda \mathrm{P} + \mu \mathrm{Q})' &= \left((\lambda a + \mu e)\mathrm{X}^3 + (\lambda b + \mu f)\mathrm{X}^2 + (\lambda c + \mu g)\mathrm{X} + (\lambda d + \mu h)\right)' \\
&= 3(\lambda a + \mu e)\mathrm{X}^2 + 2(\lambda b + \mu f)\mathrm{X} + (\lambda c + \mu g) \\
&= \lambda(3a\mathrm{X}^2 + 2b\mathrm{X} + c) + \mu(3e\mathrm{X}^2 + 2f\mathrm{X} + g) \\
&= \lambda \mathrm{P}' + \mu \mathrm{Q}'.
\end{aligned}$$

(ii) Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. Alors
$$\mathrm{P}' = 0 \iff 3a\mathrm{X}^2 + 2b\mathrm{X} + c = 0 \iff a = b = c = 0.$$
Ainsi, $\ker \mathrm{P}$ est l'ensemble des polynômes constants.
On va maintenant montrer que $\operatorname{im} \mathrm{D} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, sa dérivée est par définition de degré $\leq \deg \mathrm{P} - 1 \leq 2$. Réciproquement, tout polynôme $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est la dérivée du polynôme
$$\frac{a}{3}\mathrm{X}^3 + \frac{b}{2}\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}].$$

(iii) Le noyau de D est de dimension 1 et son image de dimension 3. Donc
$$\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f) = 4.$$

Question bonus. Oui, on pouvait anticiper le résultat dès la fin de la question (i) grâce au théorème du rang :
$$\dim(\ker \mathrm{D}) + \dim(\operatorname{im} \mathrm{D}) = \dim(\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]) = 4.$$

Solution 9. (i) Soit f une homothétie. Par définition, il existe un scalaire $\lambda \in k$ tel que $\forall x \in \mathrm{E}, f(x) = \lambda x$. Alors pour tous $\mu, \nu \in k$ et tous $x, y \in \mathrm{E}$,
$$f(\mu x + \nu y) = \lambda(\mu x + \nu y) = \lambda\mu x + \lambda\nu y = \mu\lambda x + \nu\lambda y = \mu f(x) + \nu f(y).$$
Ainsi toute homothétie est linéaire.
Soit f une homothétie de rapport λ et D une droite vectorielle de E. Si $\lambda = 0$, alors clairement $f(\mathrm{D}) = \{0\}$. Sinon on va montrer que $f(\mathrm{D}) = \mathrm{D}$. La droite vectorielle D est un sous-espace de E de dimension 1, donc il existe $u \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{D} = \operatorname{Vect}(u)$. Si $x \in \mathrm{D}$, c'est qu'il existe $\alpha \in k$ tel que $x = \alpha u$: donc $f(x) = \lambda\alpha u \in \mathrm{D}$; réciproquement,
$$x = \lambda\frac{\alpha}{\lambda}u = f\left(\frac{\alpha}{\lambda}u\right) \in f(\mathrm{D}).$$

(ii) (a) Soit $a \in \mathrm{E}$. Si on note D_a la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(a)$, par hypothèse $f(\mathrm{D}_a) = \mathrm{D}_a$. En particulier, $f(a) \in \mathrm{D}_a$. C'est-à-dire qu'il existe une scalaire λ_a tel que $f(a) = \lambda_a a$.

(b) La question précédente et la linéarité de f permettent d'écrire :
$$\begin{aligned}\lambda_{e_1+\cdots+e_n} e_1 + \cdots + \lambda_{e_1+\cdots+e_n} e_n &= \lambda_{e_1+\cdots+e_n}(e_1 + \cdots + e_n) \\ &= f(e_1 + \cdots + e_n) = f(e_1) + \cdots + f(e_n) \\ &= \lambda_{e_1} e_1 + \cdots + \lambda_{e_n} e_n.\end{aligned}$$
Or $\mathscr{B}$ est une base, donc on peut identifier coefficients par coefficients :
$$\lambda_{e_1} = \cdots = \lambda_{e_n} = \lambda_{e_1+\cdots+e_n}.$$
On note λ ce scalaire pour plus de simplicité. Alors, par définition des λ_{e_k}, on a $\forall k \in \{1, \ldots, n\}, f(e_k) = \lambda e_k$.
On montre alors que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $f(x) = \lambda x$. Soit $x \in \mathrm{E}$, qu'on écrit $x = \sum_k \mu_k e_k$ sur la base $\mathscr{B}$: alors
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda e_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k = \lambda x.$$