Solution de la question de cours 1. Soient $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes non nuls tels que

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n).$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0. \tag{1}$$

On suppose par l'absurde que $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \neq 0$. C'est-à-dire que l'ensemble

$$\{i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i \neq 0\}$$

est non vide. Il admet donc un maximum i_0. Alors l'équation 1 devient :

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{i_0} P_{i_0} = 0.$$

En écrivant $P_{i_0} = \sum_{k=0}^{d_{i_0}} p_k X^k$, et en identifiant les termes de degré $d_{i_0} = \deg(P_{i_0})$, on trouve

$$\lambda_{i_0} p_{d_{i_0}} = 0.$$

Le coefficient $p_{d_{i_0}}$ étant non nul, on en déduit $\lambda_{i_0} = 0$, ce qui contredit la définition même de λ_{i_0}.

Solution de la question de cours 2. Considérons une famille liée $(e_1, \dots, e_n)$ dans un k-espace vectoriel E. Par définition, il existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in k^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E.$$

Comme λ n'est pas le n-uplet nul, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Ceci nous permet d'isoler e_i comme suit :

$$e_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} e_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} e_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} e_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} e_n.$$

Le vecteur e_i est bien combinaison linéaire des autres.

Réciproquement, supposons un des vecteurs e_i combinaison linéaire des autres. C'est-à-dire qu'il existe $\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n \in k$ tel que

$$e_i = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_{i-1} e_{i-1} + \mu_{i+1} e_{i+1} + \cdots + \mu_n e_n.$$

Alors, on a :

$$\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_{i-1} e_{i-1} - e_i + \mu_{i+1} e_{i+1} + \cdots + \mu_n e_n = 0.$$

Le coefficient devant e_i étant $-1 \neq 0$, c'est bien une relation de liaison : la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est donc liée.

Solution de la question de cours 3. Notons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Posons

$$P = \{f \in E : f \text{ paire}\},$$
$$I = \{f \in E : f \text{ impaire}\}.$$

Alors P et I sont des sous-espaces vectoriels de E :

— la fonction nulle est paire, donc $0 \in \mathrm{P}$; si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{P}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\, (\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x);$$

de même, si $f, g \in \mathrm{P}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\, (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x).$$

— la fonction nulle est impaire, donc $0 \in \mathrm{I}$; si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{I}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\, (\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda(-f(x)) = -(\lambda f(x));$$

de même, si $f, g \in \mathrm{I}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\, (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x).$$

On va alors montrer : $\mathrm{E} = \mathrm{P} \oplus \mathrm{I}$. Pour cela, il faut prouver deux choses : $\mathrm{P} \cap \mathrm{I} = \{0\}$ et $\mathrm{E} = \mathrm{P} + \mathrm{I}$.
Soit $f \in \mathrm{P} \cap \mathrm{I}$. La fonction f est alors paire et impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x) = -f(x).$$

Le seul réel égal à son opposé est 0, donc f est identiquement nulle. C'est-à-dire que c'est le vecteur nul de E. Ainsi, $\mathrm{P} \cap \mathrm{I} = \{0\}$.
De plus, toute fonction $f \in \mathrm{E}$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R},\, f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Or $x \mapsto (f(x) + f(-x))/2$ est paire et $x \mapsto (f(x) + f(-x))/2$ est impaire. Ceci finit de prouver $\mathrm{E} = \mathrm{P} + \mathrm{I}$.

Solution 1. Soit $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe.

(i) Soient $e, e' \in \mathrm{G}$ deux éléments neutres. C'est-à-dire qui vérifient :

$$\forall g \in \mathrm{G},\, e \star g = g = g \star e \quad \text{et} \quad e' \star g = g = g \star e'.$$

En particulier, $e' = e' \star e = e$ où la première égalité utilise la neutralité de e et la deuxième celle de e'.

(ii) Soit $g \in \mathrm{G}$. Soient $h, h' \in \mathrm{G}$ tels que :

$$h \star g = e = g \star h, \quad h' \star g = e = g \star h'.$$

Alors $h' = h' \star e = h' \star (g \star h) = (h' \star g) \star h = e \star h = h$.

Solution 2. Supposons par l'absurde que K[X] soit un corps. Alors, comme $\mathrm{X} \neq 0$, il doit avoir un inverse pour la multiplication. C'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{XP} = 1$. En prenant le degré dans cette équation, on obtient :

$$0 = \deg(\mathrm{XP}) = \deg(\mathrm{X}) + \deg(\mathrm{P}) = 1 + \deg(\mathrm{P}).$$

On obtient ainsi $\deg(\mathrm{P}) = -1$, ce qui est absurde.

Solution 3. (i) Le but de cette question est de vous faire énumérer les axiomes d'un espace vectoriel, et de vous faire déterminer les lois internes et externes, le neutre et l'opposition pour la loi interne. La vérification effective des axiomes est souvent triviale et ne m'intéressait guère dans le cadre de la colle.

Il s'agit d'abord de montrer que $(\mathbb{R}[X], +)$ est un groupe commutatif.

— la somme de deux polynômes est un polynôme, donc $+$ est interne,

— le polynôme nul 0 est neutre pour $+$,

— la somme de polynômes est associative : si P, Q, R s'écrivent $\sum_i p_i X^i, \sum_i q_i X^i, \sum_i r_i X^i$, alors

$$\begin{aligned}(P+Q)+R &= \sum_i (p_i+q_i)X^i + \sum_i r_i X^i \\ &= \sum_i ((p_i+q_i)+r_i)X^i \\ &= \sum_i (p_i+(q_i+r_i))X^i \\ &= \sum_i p_i X^i + \sum_i (q_i+r_i)X^i \\ &= P+(Q+R).\end{aligned}$$

L'associativité vient donc directement de celle de l'addition dans $\mathbb{R}$.

— tout polynôme P admet $-P$ comme opposé pour la loi $+$.

Il s'agit ensuite de vérifier les axiomes de la loi externe. Cette loi est bien entendu la multiplication d'un polynôme par un réel : pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P = \sum_k p_k X^k$, le polynôme λP est défini comme $\sum_k \lambda p_k X^k$. On vérifie facilement (il suffit d'écrire une ligne de calcul à chaque fois) :

$$\begin{gathered}\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall P \in \mathbb{R}[X], \lambda(\mu P) = (\lambda\mu)P, \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall P \in \mathbb{R}[X], (\lambda+\mu)P = \lambda P + \mu P, \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \lambda(P+Q) = \lambda P + \lambda Q, \\ \forall P \in \mathbb{R}[X], 1P = P.\end{gathered}$$

(ii) On montre que $\mathbb{R}_n[X]$ contient 0 et est stable par combinaison linéaire. Le polynôme nul à degré $-\infty$, ce qui est bien inférieur à n : donc $0 \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leq \max(\deg(\lambda P), \deg(\mu Q)) \leq \max(\deg P, \deg Q) \leq n,$$

ce qui montre que $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

(iii) Là, il faut faire preuve d'un tout petit peu d'initiative. Un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'écrit

$$a_0 \times 1 + a_1 \times X + \cdots + a_n \times X^n.$$

Mais les éléments $1, X, X^2, \dots, X^n$ sont eux-mêmes des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On vient donc de montrer que $\mathscr{F} = (1, X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. Si l'on montre qu'elle est aussi libre, on aura trouvé une base. Or les polynômes de $\mathscr{F}$ ont des degrés deux à deux distincts : on peut donc appliquer la propriété du cours, ce qui montre que $\mathscr{F}$ est libre.

Ainsi, $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme elle contient $n+1$ vecteurs, l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$.

(iv) Ici, je ne demandais pas une réponse rigoureuse, mais seulement une intuition : si on fait grandir n, on a des espaces $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension toujours plus grande dans $\mathbb{R}[X]$, donc $\mathbb{R}[X]$ est nécessairement de dimension infinie.

Une preuve rigoureuse serait la suivante. Supposons par l'absurde que $\mathbb{R}[X]$ soit de dimension finie $N \in \mathbb{N}$. Alors toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à N. Pourtant on a montré que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^N)$ de $N+1$ vecteurs est libre, menant à l'absurdité $N+1 \leq N$.

Pour la culture : la dimension de $\mathbb{R}[X]$ est infinie, mais c'est le plus petit infini possible. On dit que la dimension de $\mathbb{R}[X]$ est *dénombrable* (et on écrit $\dim(\mathbb{R}[X]) = \aleph_0$), car on peut en trouver une base en bijection avec $\mathbb{N}$, à savoir la base (infinie donc) $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Solution 4. (i) Le but de cette question est de vous faire énumérer les axiomes d'un espace vectoriel, et de vous faire déterminer les lois internes et externes, le neutre et l'opposition pour la loi interne. La vérification effective des axiomes est souvent triviale et ne m'intéressait guère dans le cadre de la colle.

Il s'agit d'abord de montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif, où la loi $+$ est définie comme suit : pour $f, g \in E$, $f+g$ est la fonction $x \mapsto f(x) + g(x)$.

- la somme de deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, donc $+$ est interne,
- la fonction nulle $0\colon x \mapsto 0$ est neutre pour $+$,
- la somme de fonctions est associative : si $f, g, h \in E$, alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ ((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x) + h(x)\\ &= (f(x)+g(x)) + h(x)\\ &= f(x) + (g(x)+h(x))\\ &= f(x) + (g+h)(x)\\ &= (f+(g+h))(x).\end{aligned}$$

  L'associativité vient donc directement de celle de l'addition dans $\mathbb{R}$.
- toute fonction f admet $-f$ comme opposée pour la loi $+$.

Il s'agit ensuite de vérifier les axiomes de la loi externe. Cette loi est bien entendu la multiplication d'une fonction par un réel : pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, λf est définie comme $x \mapsto \lambda f(x)$. On vérifie facilement (il suffit d'écrire une ligne de calcul à chaque fois) :

$$\begin{gathered}\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in E, \lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f,\\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in E, (\lambda+\mu) f = \lambda f + \mu f,\\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in E, \lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g,\\ \forall f \in E, 1f = f.\end{gathered}$$

(ii) Par définition même de T, la famille $\mathscr{E} = (\varepsilon^+, \varepsilon^-)$ est génératrice de T. Si l'on montre également qu'elle est libre, on aura trouvé une base de T. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que

$$\lambda\varepsilon^+ + \mu\varepsilon^- = 0,$$

i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda e^{ix} + \mu e^{-ix} = 0,$$

En particulier, pour $x = 0$, on a $\lambda + \mu = 0$; et pour $x = \pi/2$, on a $\lambda i - \mu i = 0$. On résout facilement : $\lambda = \mu = 0$.

Ainsi, la famille $\mathscr{E}$ ets libre et génératrice dans T, c'en est donc une base. Son cardinal étant 2, on en déduit $\dim \mathrm{T} = 2$.

(iii) On a $\cos \in \mathrm{T}$ et $\sin \in \mathrm{T}$. En effet, on peut les écrire sur la base précédente grâce à la formule d'Euler :

$$\cos = \frac{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}{2}, \quad \sin = \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{2i}.$$

Les coordonnées de cos dans la base $\mathscr{E}$ sont $(1/2, 1/2)$ et celle de sin sont $(1/(2i), -1/(2i))$.

(iv) Montrons alors que $\mathscr{F} = (\cos, \sin)$ est également une base de T. Il faut remarquer que

$$\varepsilon^+ = \cos + i \sin \quad \text{et} \quad \varepsilon^- = \cos - i \sin .$$

Ainsi, on a $\varepsilon^+, \varepsilon^- \in \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$. Comme on avait déjà, $\cos, \sin \in \mathrm{Vect}(\varepsilon^+, \varepsilon^-)$, on a finalement :

$$\mathrm{Vect}(\cos, \sin) = \mathrm{Vect}(\varepsilon^+, \varepsilon^-) = \mathrm{T}.$$

Donc $\mathscr{F}$ est génératrice. Ainsi $\mathscr{F}$ est une famille génératrice à 2 éléments dans un espace de dimension 2 : c'en est une base. (Alternativement, on peut montrer que $\mathscr{F}$ est libre à la main.)

Les coordonnées de ε^+ et ε^- dans $\mathscr{F}$ ont déjà été exhibées : les coordonnées de ε^+ sont $(1, i)$, celles de sin sont $(1, -i)$.

Solution 5. La question préliminaire admet la même solution que la première question de l'exercice précédent (en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$).

(i) Cette question ne traite pas d'espaces vectoriels. Si l'on pose $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$, l'énoncé dit exactement que $f(x)$ est une racine de P pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, si f prend strictement plus de n valeurs, le polynôme P de degré $\leq n$ admet strictement plus de n racines : c'est donc que $\mathrm{P} = 0$, c'est-à-dire que tous les a_i sont nuls.

(ii) Soient $\lambda_{n_1}, \dots, \lambda_{n_k}$ des réels tels que

$$\lambda_{n_1} \varepsilon_{n_1} + \cdots + \lambda_{n_k} \varepsilon_{n_k} = 0.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_{n_1} \mathrm{e}^{n_1 x} + \cdots + \lambda_{n_k} \mathrm{e}^{n_k x} = 0.$$

Ce que l'on réécrit : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_{n_1} (\mathrm{e}^x)^{n_1} + \cdots + \lambda_{n_k} (\mathrm{e}^x)^{n_k} = 0.$$

Quitte à réordonner les n_i, on peut supposer que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. On note alors $n = n_k$ et on pose $\lambda_i = 0$ pour tout $i \leq n$ tel que $i \notin \{n_1, \dots n_k\}$. Alors on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_0 + \lambda_1 (\mathrm{e}^x) + \lambda_2 (\mathrm{e}^x)^2 + \cdots + \lambda_n (\mathrm{e}^x)^n = 0.$$

On est donc exactement dans la situation de la question précédente avec $f = \exp$. Comme exp prend une infinité de valeur, on en déduit $\lambda_i = 0$ pour tout $i \leq n$. En particulier, les λ_{n_i} sont nuls, ce qui prouve que la famille $(\varepsilon_{n_1}, \dots, \varepsilon_{n_k})$ est libre.

(iii) Je n'attendais pas une réponse parfaitement justifiée, mais plutôt une intuition : E a des familles libres de cardinal arbitrairement grand (faire grandir k dans la question précédente) et ne peut donc être de dimension finie.

Cet argument peut facilement être fait rigoureux : supposons par l'absurde que E soit de dimension finie N. Alors les familles libres de E sont de cardinal $\leq$ N. Or, on a montré (entre autres) que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{N+1})$ est une famille libre de E, menant à l'absurdité $N+1 \leq N$.

Attention ! Contrairement à l'exercice 3, ici $\dim E$ n'est pas le plus petit infini possible. Cette dimension est monstrueusement grande comparée à $\dim \mathbb{R}[X]$.

Question bonus : la réponse est non. Toutes les fonctions ε_i sont continues, et une combinaison linéaire de fonctions continues est encore une fonction continue. Donc les fonctions non continues telles que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ ne peuvent pas être engendrées par la famille $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Solution 6. (i) Comme F est un sous-espace vectoriel, on a $0 \in F$. Donc $0 \notin E \setminus F$, empêchant ainsi $E \setminus F$ d'être un sous-espace vectoriel de E.

(ii) Si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$, alors $F \cup G$ est égal à F ou à G, donc est un sous-espace vectoriel.

Réciproquement, supposons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. On veut montrer que $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$. Si jamais $F \subseteq G$, c'est bon, on a gagné. Sinon $F \nsubseteq G$. C'est-à-dire qu'il existe $f \in F$ tel que $f \notin G$. On va alors montrer que $G \subseteq F$. Soit donc $g \in G$, et l'on souhaite montrer que $g \in F$. Comme f, g sont dans le sous-espace vectoriel $F \cup G$, on a encore $f + g \in F \cup G$. Alors $f + g \in F$ ou $f + g \in G$. Or si $f + g \in G$, alors $f = (f + g) - g$ appartient encore à G, ce qui contredit la définition de f. Donc $f + g \in F$, donc $g = (f + g) - f$ est encore dans F. Ce qu'il fallait démontrer.

(iii) On montre $\mathrm{Vect}(F \cup G) = F + G$.

Soit $v \in F + G$. Par définition, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $v = f + g$. Donc v est combinaison linéaire d'éléments de $F \cup G$.

Réciproquement, soit $v \in \mathrm{Vect}(F \cup G)$. Par définition, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires et $v_1, \ldots, v_n \in F \cup G$ tels que :

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

En réunissant les v_i appartenant à F et ceux appartenant à G (pour ceux qui appartiennent aux deux, on fait un choix arbitraire), on a

$$v = (\lambda_{i_1} v_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k} v_{i_k}) + (\lambda_{j_1} v_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_\ell} v_{j_\ell})$$

avec $v_{i_m} \in F\, (\forall m \in \{1, \ldots, k\})$ et $v_{j_m} \in G\, (\forall m \in \{1, \ldots, \ell\})$. Or F et G sont des sous-espaces vectoriels, donc sont stables par combinaisons linéaires. Ainsi :

$$\lambda_{i_1} v_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k} v_{i_k} \in F, \quad \lambda_{j_1} v_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_\ell} v_{j_\ell} \in G.$$

Ce qui finit de démontrer que $v \in F + G$.

Solution 7. On note k le corps de base des espaces vectoriels de l'exercice.

(i) Le vecteur nul s'écrit $0 = 0 + 0$ où le premier 0 de la somme est vu comme élément de F et le deuxième comme élément de G. Ainsi $0 \in F + G$.

De plus, $F+G$ est stable par combinaisons linéaires : si $x, y \in F+G$, alors il existe $f_x, f_y \in F$ et $g_x, g_y \in G$ tels que $f = f_x + g_x$ et $g = g_x + g_y$; pour tout $\lambda, \mu \in k$, on a alors

$$\lambda x + \mu y = \lambda(f_x + g_x) + \mu(f_y + g_y) = \underbrace{(\lambda f_x + \mu f_y)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda g_x + \mu g_y)}_{\in G},$$

ce qui montre $\lambda x + \mu y \in F+G$.

(ii) Si $x \in F \cap G$, le vecteur x admet les décompositions suivantes :

$$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G} \qquad \text{et} \qquad x = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}.$$

Par hypothèse, ces deux décompositions doivent être les même : ainsi $x = 0$.

(iii) Écrivons $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_m)$ et $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_n)$, et posons $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n)$ la concaténation des deux familles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. Alors $\mathscr{B}$ est une base de $F+G$.

En effet, si $x \in F+G$, alors il existe $f \in F$ et $g \in G$ tel que $x = f + g$. Comme $\mathscr{F}$ est une base de F, on peut écrire f comme combinaison linéaire des f_i :

$$f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m.$$

De même, g s'écrit sur la base $\mathscr{G}$:

$$g = \mu_1 g_1 + \dots + \mu_n g_n.$$

Alors on peut écrire x comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$:

$$x = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_n g_n.$$

Ainsi, $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $F+G$.

On montre maintenant que $\mathscr{B}$ est libre. Supposons $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n$ des éléments de k tels que

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_n g_n = 0.$$

Alors, comme la décomposition de $0 = 0+0$ sur F+G est unique par hypothèse, on a :

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m = 0,$$
$$\mu_1 g_1 + \dots + \mu_n g_n = 0.$$

Mais $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des familles libres, donc on en déduit :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \mu_1 = \dots = \mu_n = 0.$$

On en déduit ainsi $\dim(F+G) = m + n = \dim F + \dim G$.

Solution 8.

Solution 9. (i) Notons $\ker f$ l'ensemble $\{x \in E : f(x) = 0\}$. On montre que $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E :

— $f(0_E) = f(00_E) = 0 f(0_E) = 0$, donc $0 \in \ker f$.

— soient $x, y \in \ker f$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0;$$

donc $\ker f$ est stable par combinaisons linéaires.

(ii) Posons $f_u : x \mapsto u \cdot x$. Notons $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Alors f_u est une forme linéaire : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned} f_u(\lambda x) &= u \cdot (\lambda x) \\ &= u_1 \lambda x_1 + \cdots + u_n \lambda x_n \\ &= \lambda(u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n) = \lambda f_u(x), \\ f_u(x+y) &= u \cdot (x+y) = u_1(x_1+y_1) + \cdots + u_n(x_n+y_n) \\ &= u_1 x_1 + \ldots u_n x_n + u_1 y_1 + \cdots + u_n y_n = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Alors l'ensemble noté $u^\perp$ de l'énoncé est exactement $\ker f_u$. En particulier, c'est un espace vectoriel.

(iii) Pour cette question, il peut être utile de faire un dessin en petite dimension ($n = 2$ ou 3). En dimension 3 par exemple, on s'aperçoit que $u^\perp$ est le plan orthogonal à la droite dirigée par u (d'où la notation $^\perp$).

On s'appuie sur cette intuition pour essayer de montrer que la droite vectorielle $\mathrm{D}_u = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un supplémentaire de $u^\perp$. On doit pour cela montrer deux choses : d'une part $u^\perp \cap \mathrm{D}_u = \{0\}$, et d'autre part $u^\perp + \mathrm{D}_u = \mathrm{E}$.

— soit $x \in u^\perp \cap \mathrm{D}_u$. Alors, puisque $u \in \mathrm{D}_u$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u$. Et comme $x \in u^\perp$, on a :

$$0 = u \cdot x = u \cdot (\lambda u) = \lambda(u \cdot u) = \lambda(u_1^2 + \cdots + u_n^2).$$

Comme $u \neq 0$, alors $u_1^2 + \cdots + u_n^2 \neq 0$. Donc $\lambda = 0$, c'est-à-dire que $x = \lambda u$ est le vecteur nul.

— On procède ici par analyse-synthèse. Soit $x \in \mathrm{E}$, on cherche à écrire :

$$x = \lambda u + y$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in u^\perp$.

Analyse. Il suffit de trouver λ : on aura alors $y = x - \lambda u$. On a notamment :

$$u \cdot (x - \lambda u) = 0.$$

De plus, comme déjà remarqué, $u \neq 0$ entraîne $u \cdot u \neq 0$. Donc :

$$\lambda = \frac{u \cdot x}{u \cdot u}.$$

Synthèse. On pose $\lambda = (u \cdot x)/(u \cdot u)$ et $y = x - \lambda u$. Alors clairement $x = \lambda u + y$ et

$$u \cdot y = u \cdot x - \lambda u \cdot u = 0.$$

Donc $y \in u^\perp$.

Solution 10.

Solution 11. (i) On montre que $\mathbb{C}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$. Tout d'abord, le polynôme nul 0 est bien un polynôme de degré $\leq n$. Ensuite, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et tous $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$, on a

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leq \max(\deg(\lambda P), \deg(\mu Q)) = \max(\deg P, \deg Q) \leq n.$$

(ii) La famille $\mathscr{B}_a = (1, (X-a), \ldots, (X-a)^n)$ est constituée de polynômes de degrés tous distincts. Par un théorème du cours, $\mathscr{B}$ est donc libre dans $\mathscr{C}[X]$. De plus, les vecteurs de $\mathscr{B}$ sont des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$. Donc $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$.
L'espace $\mathbb{C}_n[X]$ admet une base évidente $(1, X, \ldots, X^n)$ (elle est clairement génératrice et elle est libre par le même argument que ci-dessus). Donc $\mathbb{C}_n[X]$ a dimension $n+1$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n+1$: c'en est donc une base.

(iii) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Par la question précédente, on sait qu'il s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$:

$$P = \lambda_0 + \lambda_1(X-a) + \lambda_2(X-a)^2 + \cdots + \lambda_n(X-a)^n.$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\lambda_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}.$$

Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. On dérive k fois le polynôme P : tous les termes de degré strictement inférieur à k ont une dérivée k-ième nulle, on se retrouve donc avec

$$P^{(k)} = \lambda_k k! + \lambda_{k+1}(k+1)k \ldots 2(X-a) + \cdots + \lambda_n n(n-1) \ldots (n-k+1)(X-a)^{n-k}.$$

On prend alors la valeur en a :

$$P^{(k)}(a) = \lambda_k k!.$$

Ce qui donne bien le résultat voulu.

Solution 12.