Solution de la question de cours 1.

(i) Soit E un ensemble de cardinal n. L'ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ peut alors être partitionné comme suit :
$$\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \biguplus_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k(\mathrm{E}),$$
où $\mathscr{P}_k(\mathrm{E})$ est l'ensemble des parties de E de cardinal k. On a donc
$$2^n = |\mathscr{P}(\mathrm{E})| = \sum_{k=0}^{n} |\mathscr{P}_k(\mathrm{E})| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

(ii) Soit E un ensemble à $n+1$ éléments. Choisissons $a \in \mathrm{E}$ et notons $\mathrm{F} = \mathrm{E} \setminus \{a\}$. Alors $\mathscr{P}_{k+1}(\mathrm{E})$ se partitionne de la façon suivante :
$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{k+1}(\mathrm{E}) &= \{\mathrm{X} \subseteq \mathrm{E} : |\mathrm{X}| = k+1, a \notin \mathrm{X}\} \uplus \{\mathrm{X} \subseteq \mathrm{E} : |\mathrm{X}| = k+1, a \in \mathrm{X}\}\\ &= \{\mathrm{X} \subseteq \mathrm{E} : |\mathrm{X}| = k+1, \mathrm{X} \subseteq \mathrm{F}\} \uplus \{\mathrm{Y} \cup \{a\} \subseteq \mathrm{E} : |\mathrm{Y}| = k, \mathrm{Y} \subseteq \mathrm{F}\}\\ &= \mathscr{P}_{k+1}(\mathrm{F}) \uplus \mathscr{P}_k(\mathrm{F}).\end{aligned}$$
On obtient la formule de Pascal en prenant le cardinal :
$$\binom{n+1}{k+1} = |\mathscr{P}_{k+1}(\mathrm{E})| = |\mathscr{P}_{k+1}(\mathrm{F})| + |\mathscr{P}_k(\mathrm{F})| = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

(iii) On écrit :
$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ facteurs}}.$$
Pour développer ce produit, on en calcule une forme un peu plus générale : soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels (ou des complexes), alors la règle de développement du collège donne
$$\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{\mathrm{J} \subseteq \{1,\ldots,n\}} \left(\prod_{i \in \mathrm{J}} a_i\right)\left(\prod_{j \notin \mathrm{J}} b_j\right).$$
Ainsi, avec $a_1 = \cdots = a_n = a$ et $b_1 = \cdots = b_n = b$, on a
$$(a+b)^n = \sum_{\mathrm{J} \subseteq \{1,\ldots,n\}} \left(\prod_{i \in \mathrm{J}} a\right)\left(\prod_{j \notin \mathrm{J}} b\right) = \sum_{\mathrm{J} \subseteq \{1,\ldots,n\}} a^{|\mathrm{J}|} b^{|\mathrm{J}^c|}.$$
En profitant de la partition $\mathscr{P}(\{1,\ldots,n\}) = \biguplus_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k(\{1,\ldots,n\})$, on obtient alors
$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\mathrm{J} \in \mathscr{P}_k(\{1,\ldots,n\})} a^k b^{n-k} \right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \left(\sum_{\mathrm{J} \in \mathscr{P}_k(\{1,\ldots,n\})} 1 \right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} |\mathscr{P}_k(\{1,\ldots,n\})|\\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

(Bien entendu, je n'attendais pas une telle réponse détaillée à l'oral, une simple démonstration « avec les mains » me suffisait : dire que développer revient à choisir un certain nombre de a et un certain nombre de b puis les compter, etc.)

Solution de la question de cours 2.

(i) Il suffit d'utiliser la formule de De Moivre :

$$\begin{aligned}\cos(2\vartheta) + i\sin(2\vartheta) &= e^{i2\vartheta}\\ &= (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2\\ &= \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta + i2\cos\vartheta\sin\vartheta\\ &= \cos^2\vartheta - (1-\cos^2\vartheta) + i2\cos\vartheta\sin\vartheta\\ &= 2\cos^2\vartheta - 1 + i2\cos\vartheta\sin\vartheta.\end{aligned}$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on obtient les deux identités.

(ii) On fait de même :

$$\begin{aligned}\cos(3\vartheta) + i\sin(3\vartheta) &= e^{i3\vartheta}\\ &= (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^3\\ &= \cos^3\vartheta + 3i\cos^2\vartheta\sin\vartheta - 3\cos\vartheta\sin^2\vartheta - i\sin^3\vartheta\\ &= \cos^3\vartheta + 3i(1-\sin^2\vartheta)\sin\vartheta - 3\cos\vartheta(1-\cos^2\vartheta) - i\sin^3\vartheta\\ &= 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta + i(3\sin\vartheta - 4\sin^3\vartheta).\end{aligned}$$

(iii) On utilise les propriétés de $e^{i\cdot}$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) &= e^{i(\alpha+\beta)}\\ &= e^{i\alpha}e^{i\beta}\\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta).\end{aligned}$$

L'indentification des parties réelles et imaginaires redonne les formules bien connues.

Solution 1. Remarquons que $S_n + iT_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\vartheta}$. Il suffit donc de calculer cette dernière somme et d'identifier partie réelle et imaginaire à la fin.
Si $\vartheta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $e^{i\vartheta} \neq 1$ et donc

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\vartheta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\vartheta})^k = \frac{1-e^{i(n+1)\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}}.$$

Mettons le résultat sous forme trigonométrique :

$$\frac{1-e^{i(n+1)\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}} = \frac{e^{i(n+1)\vartheta/2}}{e^{i\vartheta/2}}\frac{e^{-i(n+1)\vartheta/2}-e^{i(n+1)\vartheta/2}}{e^{-i\vartheta/2}-e^{i\vartheta/2}} = e^{in\vartheta/2}\frac{\sin((n+1)\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)}$$

Ainsi, en identifiant partie réelle et imaginaire, on a :

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\vartheta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\vartheta}{2}\right), \qquad T_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\vartheta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\vartheta}{2}\right).$$

Bien entendu, si $\vartheta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $e^{i\vartheta} = 1$ et donc

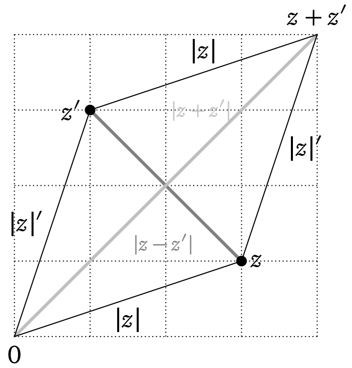
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\vartheta} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1,$$

donnant dans ce cas $S_n = n+1$ et $T_n = 0$.

Solution 2. On va utiliser l'indentité suivante : $\forall u \in \mathbb{C}\, |u| = u\bar{u}$. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on a ainsi :

$$\begin{aligned}
|z+z'|^2 + |z-z'|^2 &= (z+z')\overline{(z+z')} + (z-z')\overline{(z-z')} \\
&= (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') + (z-z')(\bar{z}-\bar{z}') \\
&= z\bar{z} + z'\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z}' + z\bar{z} - z'\bar{z} - z\bar{z}' + z'\bar{z}' \\
&= 2z\bar{z} + 2z'\bar{z}' \\
&= 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).
\end{aligned}$$

L'interprétation graphique est l'équivalent du théorème de Pythagore pour les parallèlogrammes :



Solution 3.

(i) Notons $\beta_1, \dots, \beta_n$ les racines complexes de P. Alors P s'écrit sous forme scindée :

$$P(X) = (X - \beta_1)\dots(X - \beta_n).$$

Le coefficient arrivant devant X^{n-1} en développant est $-\beta_1 - \dots - \beta_n$ et celui devant X^0 est $(-\beta_1)\dots(-\beta_n)$. Ainsi,

$$a_1 = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i, \qquad a_n = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} \beta_i.$$

(ii) Les racines n-ième de l'unité sont les racines du polynôme $X^n - 1$. D'après la question précédente, on a donc :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = -a_1 = 0, \qquad \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i = (-1)^n a_n = (-1)^{n+1}.$$

(iii) Posons $\omega = e^{2i\pi/n}$. Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0,$$

et

$$\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i = \prod_{i=0}^{n-1} \omega^k = e^{i\sum_{i=0}^{n} \frac{2k\pi}{n}} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

Solution 4. On remarque que $S_n + iT_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\vartheta}$. On calcule donc cette somme et on identifiera ensuite parties réelles et imaginaires.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\vartheta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{i\vartheta})^k 1^{n-k} = (1+e^{i\vartheta})^n.$$

On écrit ensuite $(1+e^{i\vartheta})^n$ sous forme trigonométrique :

$$(1+e^{i\vartheta})^n = \left(e^{i\vartheta/2}(e^{-i\vartheta/2}+e^{i\vartheta/2})\right)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\vartheta}{2}\right) e^{in\vartheta/2}.$$

Ainsi, en identifiant parties réelles et imaginaires, on a

$$S_n = 2^n \cos^n\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\vartheta}{2}\right), \qquad T_n = 2^n \cos^n\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\vartheta}{2}\right).$$

Solution 5.

Solution 6.

(i) On procède par analyse-synthèse.
Analayse. Comme L_k admet tous les $a_i, i \neq k$ comme racines, on a

$$L_k(X) = \left(\prod_{i\neq k}(X-a_i)\right) Q(X)$$

pour un certain polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$. Le polynôme $\prod_{i\neq k}(X-a_i)$ a degré n, et L_k a un degré $\leq n$. Ainsi, Q est nécessairement de degré nul, c'est-à-dire Q est un polynôme constant $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme de plus $L_k(a_k) = 1$, on a

$$\lambda \prod_{i\neq k}(a_k - a_i) = 1.$$

Donc, $\lambda = 1/(\prod_{i\neq k}(a_k-a_i))$.
Synthèse. Le polynôme

$$\frac{\prod_{i\neq k}(X-a_i)}{\prod_{i\neq k}(a_k-a_i)}$$

répond clairement au problème.

(ii) Ici, il faut faire preuve d'un peu d'initiative. On peut commencer par résoudre le cas particulier $b_i = 0 \, \forall i \neq k$ par exemple. Alors $b_k L_k$ semble tout indiqué :

en effet, pour tout $i \neq k$, $b_k \mathrm{L}_k(a_i) = b_k \times 0 = 0$ et $b_k \mathrm{L}_k(a_k) = b_k \times 1 = b_k$. Cela donne l'intuition pour le cas général : essayons

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} b_k \mathrm{L}_k(\mathrm{X}).$$

En effet, pour tout $i \in \{0, \ldots, b\}$, on a

$$\mathrm{P}(a_i) = \sum_{k=0}^{n} b_k \mathrm{L}_k(a_i) = b_i \mathrm{L}(a_i) = b_i.$$

De plus ce pôlynome P est bien de degré $\leq n$.

(iii) Supposons qu'il existe P et P′ de degré $\leq n$ répondant au problème. Alors pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a

$$(\mathrm{P} - \mathrm{P}')(a_i) = \mathrm{P}(a_i) - \mathrm{P}'(a_i) = b_i - b_i = 0.$$

Donc le polynôme $\mathrm{P} - \mathrm{P}'$ admet $n+1$ racines au moins. Or il est de degré $\leq n$. Ainsi $\mathrm{P} - \mathrm{P}' = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$.

Solution 7.

(i) Il suffit de remarquer

$$\mathrm{X}^n - 1 = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + \mathrm{X} + 1).$$

D'autre part, on sait que

$$\mathrm{X}^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k.$$

Ainsi, par unicité de la division euclidienne des polynômes, on a une factorisation du polynôme de l'énoncé (en enlevant le facteur pour $k = 0$) sous la forme :

$$\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + \mathrm{X} + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} \omega^k.$$

Ce qui est équivalent à dire que les racines sont les $\omega^k, k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

(ii) On va développer à l'intérieur de la somme en utilisant le binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega^{kj} \right).$$

Puis on échange les signes de sommation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{j} \omega^{kj} \right).$$

Le coefficient $\binom{n}{j}$ ne dépend pas de l'indice k de la somme interne, donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k \right).$$

On aimerait maintenant appliquer la question précédente pour pouvoir écrire $\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k = 0$. Attention ! En effet, ω^j est racine du polynôme de la question précédente que si $j \not\equiv 0 \pmod n$. Il faut donc isoler les cas $j = 0$ et $j = n$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n &= \binom{0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1 + \binom{n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1 + \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k\right)\\ &= n + n + \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}\times 0\\ &= 2n.\end{aligned}$$

Solution 8.

Solution 9.

Solution 10.

(i) Si $a = 0$, alors $z^n = 0$ a une unique solution : $z = 0$. Sinon l'équation équivaut à :

$$\left(\frac{z}{a}\right)^n = 1.$$

Or on connaît les racines n-ièmes de l'unité, donc

$$\exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ \frac{z}{a} = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}.$$

Les solutions de l'équation $z^n = a^n$ sont donc les $a\mathrm{e}^{2ik\pi/n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$.

(ii) Clairement 1 n'est pas solution, donc l'équation équivaut à :

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = i.$$

Or $i = \mathrm{e}^{i\pi/2} = (\mathrm{e}^{i\pi/(2n)})^n$, donc par la question précédente, z est solution de l'équation si et seulement s'il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que

$$\frac{1+z}{1-z} = \mathrm{e}^{i\pi/(2n)}\mathrm{e}^{2ik\pi/n} = \mathrm{e}^{i(4k+1)\pi/(2n)}.$$

Notons $\vartheta_k = \frac{4k+1}{2n}\pi$ pour plus de simplicité. On a donc montré

$$\begin{aligned}(1+z)^n = i(1-z)^n &\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ 1+z = \mathrm{e}^{i\vartheta_k}(1-z)\\ &\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ z = \frac{\mathrm{e}^{i\vartheta_k}-1}{\mathrm{e}^{i\vartheta_k}+1}\\ &\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ z = \frac{\mathrm{e}^{i\vartheta_k/2}}{\mathrm{e}^{i\vartheta_k/2}}\,\frac{\mathrm{e}^{i\vartheta_k/2}-\mathrm{e}^{-i\vartheta_k/2}}{\mathrm{e}^{i\vartheta_k/2}+\mathrm{e}^{-i\vartheta_k/2}}\\ &\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ z = \frac{2i\sin\left(\frac{\vartheta_k}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\vartheta_k}{2}\right)}\\ &\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ z = i\tan\left(\frac{\vartheta_k}{2}\right)\end{aligned}$$

Solution 11.

(i) On rappelle que si $\mathrm{A}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ et $\mathrm{B}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathrm{X}^k$ sont deux polynômes, alors le polynôme produit AB est défini par

$$\mathrm{AB}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) \mathrm{X}^k.$$

Ainsi, en suivant l'indication de l'énoncé, on a dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'égalité $(\mathrm{X}+1)^{m+n} = (\mathrm{X}+1)^n(\mathrm{X}+1)^m$ qui se réécrit grâce au binôme de Newton en

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} \mathrm{X}^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{X}^k \right) \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \mathrm{X}^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \right) \mathrm{X}^k. \end{aligned}$$

En indentifiant les coefficients, on a exactement la formule de l'énoncé.

(ii) On peut maintenant calculer

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}.$$

Solution 12.