Solution de la question de cours 1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0, \ldots, n\}$. On écrit la version explicite des coefficients binomiaux et on effectue le calcul brutalement :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} &= \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} + \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!(n-p) + n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{n!(n-p+p+1)}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} \\ &= \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Solution de la question de cours 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

Solution de la question de cours 3. Soit E un ensemble. On pose $\varphi \colon \mathcal{P}(\mathrm{E}) \to \{0,1\}^{\mathrm{E}}$ et $\psi \colon \{0,1\}^{\mathrm{E}} \to \mathcal{P}(\mathrm{E})$ les applications définies par

$$\forall \mathrm{A} \subseteq \mathrm{E},\ \varphi(\mathrm{A}) = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}, \qquad \forall f \in \{0,1\}^{\mathrm{E}},\ \psi(f) = \{x \in \mathrm{E} : f(x) = 1\}.$$

On vérifie immédiatement que ψ est un inverse de φ. Cette dernière est donc bijective.
Supposons de plus $\operatorname{Card}(\mathrm{E}) = n \in \mathbb{N}$. Par ce qui précède,

$$\operatorname{Card}(\mathcal{P}(\mathrm{E})) = \operatorname{Card}\left(\{0,1\}^{\mathrm{E}}\right).$$

Or $\{0,1\}^{\mathrm{E}}$ a cardinalité 2^n : en effet, le choix d'une fonction $f : \mathrm{E} \to \{0,1\}$ est le choix pour chaque élément $x \in \mathrm{E}$ de l'image $f(x) \in \{0,1\}$; ces choix étant indépendants les uns des autres, il y a 2^n telles fonctions.

Solution 1. Les deux premières sommes sont des applications directes de la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n, \\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = (1-1)^n = 0.\end{aligned}$$

Les deux dernières sommes demandent un peu plus d'initiative. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^n$. Alors, par la formule du binôme de Newton,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)^n = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

En dérivant f, on obtient donc l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ n(1+x)^{n-1} = f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}.$$

En $x = 1$, cela donne

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k},$$

ce qui donne la troisième somme. En $x = -1$, cela donne

$$0 = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-1)^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(-1)^{k+1}.$$

Solution 2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(i) C'est une application directe du binôme de Newton :

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = (1+1)^n = 2^n,$$
$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k = (1-1)^n = 0.$$

(ii) En séparant les termes pairs et impairs dans A_n et B_n, on a :

$$\mathrm{E}_n + \mathrm{O}_n = \mathrm{A}_n, \qquad \mathrm{E}_n - \mathrm{O}_n = \mathrm{B}_n.$$

On en déduit donc $\mathrm{E}_n = (\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n)/2 = 2^{n-1}$ et $\mathrm{O}_n = (\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n)/2 = 2^{n-1}$.

Solution 3. Soit E un ensemble de cardinal n. D'une part, on sait que

$$\operatorname{Card}(\mathcal{P}(\mathrm{E})) = 2^n.$$

D'autre part, on peut partitionner $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ par la taille de ses éléments :

$$\mathcal{P}(\mathrm{E}) = \bigcup_{k=0}^{n}\{\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E} : \operatorname{Card}(\mathrm{A}) = k\},$$

ce qui donne l'égalité

$$\operatorname{Card}(\mathcal{P}(\mathrm{E})) = \sum_{k=0}^{n}\operatorname{Card}(\{\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E} : \operatorname{Card}(\mathrm{A}) = k\}).$$

Or, par définition, $\binom{n}{k} = \operatorname{Card}(\{\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E} : \operatorname{Card}(\mathrm{A}) = k\})$, ce qui conclut.

Solution 4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0, \ldots, n\}$. On cherche à montrer la formule

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

On propose l'expérience de pensée suivante : on suppose avoir $n+1$ moutons ; tous sont blancs sauf un. Pour choisir $p+1$ moutons parmi eux, on peut

— soit choisir le mouton noir puis choisir les p restants parmi les n moutons blancs,

— soit ne pas choisir le mouton noir et choisir $p+1$ moutons parmi les n blancs.

Solution 5. On procède par récurrence **forte**.
Initialisation : par hyptohèse $f(0) \leq 0$, et comme f est à valeur dans $\mathbb{N}$, on a finalement $f(0) = 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ telle que $\forall k \leq n, f(k) = k$. On cherche à montrer :

$$\forall k \leq n+1, f(k) = k.$$

Pour $k \leq n$, c'est l'hyptohèse de récurrence qui l'assure. Il reste le cas $k = n+1$. Par hypothèse, $f(n+1) \leq n+1$. Comme f injective et que $k = f(k)$ pour tout $k \leq n$, on a $f(n+1) \geq n+1$. Ainsi, $f(n+1) = n+1$.

Solution 6. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On applique deux fois la linéarité des sommes, i.e. $\sum_{k=0}^{n} p a_k = p \sum_{k=0}^{n} a_k$:

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} 2^{i+j} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} 2^i 2^j = \sum_{i=0}^{m}\left(2^i \sum_{j=0}^{n} 2^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{n} 2^j\right)\left(\sum_{i=0}^{m} 2^i\right)$$
$$= (2^{n+1}-1)(2^{m+1}-1).$$

Solution 7. On procède par récurrence.
Initialisation : pour $n = 1$, on a bien $1 < \frac{7}{4}$; pour $n = 2$, on a bien $2 < \frac{49}{16}$.
Hérédité : supposons $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{F}_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}.$$

Alors

$$\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{7}{4}\right)^n = \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^n \frac{11}{4}.$$

Or $\frac{11}{4} < \frac{49}{16}$, donc

$$\mathrm{F}_{n+2} < \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}.$$

Solution 8. On procède par récurrence.
Initialisation : on a clairement

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0 \times 1 \times 1}{6}.$$

Hérédité : supposons $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Solution 9. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$. On calcule la somme suivante dans $\mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ik\vartheta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)^k = \left(1+\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)^n.$$

Il suffit maintenant de remarquer que :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ik\vartheta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ik\vartheta}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(1+\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)^n\right), \\ \mathrm{T}_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{ik\vartheta}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ik\vartheta}\right) = \mathrm{Im}\left(\left(1+\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)^n\right).\end{aligned}$$

On peut même faire un peu mieux, en mettant $1+\mathrm{e}^{i\vartheta}$ sous forme trigonométrique : on rappelle qu'on a les formules

$$1+\cos\vartheta = 2\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \qquad \sin\vartheta = 2\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right);$$

ainsi, on a la forme trgionométrique

$$1+\mathrm{e}^{i\vartheta} = 2\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\vartheta}{2}}.$$

Donc

$$\left(1+\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\mathrm{e}^{in\frac{\vartheta}{2}},$$

ce qui conclut :

$$\mathrm{S}_n = 2^n\cos^n\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(n\frac{\vartheta}{2}\right), \qquad \mathrm{T}_n = 2^n\cos^n\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\left(n\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Solution 10.

(i) On procède par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'on ait un polynôme P comme dans l'énoncé. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^4 + bx^3 + cx^2 - a(x-1)^4 - b(x-1)^3 - c(x-1)^2 = x^3.$$

On utilise la formule du binôme de Newton pour développer et rassembler les termes de même degré :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 4ax^3 + (3b-6a)x^2 + (4a-3b+2c)x + (b-a-c) = x^3.$$

On identifie alors les coefficents des deux polynômes :

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ -6a+3b = 0 \\ 4a-3b+2c = 0 \\ -a+b-c = 0 \end{cases}$$

Ce système admet comme unique solution $(a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4})$.
Synthèse. Le polynôme $\mathrm{P}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$ respecte bien

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(x-1) = x^3.$$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(k) - \mathrm{P}(k-1) = \mathrm{P}(n) - \mathrm{P}(0) &= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} \\ &= \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Solution 11.

Solution 12. On procède par récurrence.
Initialisation : pour $n = 0$, on a bien

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{0} = \binom{0}{0} = \binom{1}{1}.$$

Comme $\{0, \dots, 0\}$ ne contient que 0, on a la propriété de l'énoncé pour $n = 0$.
Hérédité : supposons $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \in \{0, \dots, n\},\ \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Alors pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1}\binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

Le cas $p = n+1$ est immédiat :

$$\sum_{k=n+1}^{n+1} \binom{k}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+2}{(n+1)+1}.$$

Solution 13.

Solution 14.